Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Урюпинский агропромышленный техникум»

ЛЕКЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦПЛИНЫ

Математика

43.01.09 Повар, кондитер
15.01.05 Сварщик (ручной и частично механической сварки (наплавки))
35.02.07 Механизация сельского хозяйства

Урюпинск, 2020

Оглавление

Введение

Основные понятия и термины по теме*: значение математической науки*

План изучения темы:

1. Цели и задачи изучения математики в учреждениях начального и среднего профессионального образования.
2. Значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике.

Краткое изложение теоретических вопросов:

1. Математика является одной из самых древних наук. Слово математика происходит от греческого слова «матема», что означает знание. Зародилась математика на заре человеческой цивилизации под влиянием потребностей практики. Строительство, измерение площадей земельных участков, навигация, торговые расчеты, управление государством требовали умения производить арифметические вычисления и определенных геометрических знаний.

В результате многовековой трудовой деятельности людей возникли основные абстрактные математические понятия, такие как число, геометрическая фигура, функция, производная, интеграл и т.д. За свою историю математика превратилась в стройную дедуктивную науку, представляющую мощный аппарат для изучения окружающего нас мира.

Цель изучения математики в средних специальных учебных заведениях состоит в том, чтобы углубить знания по изученным в средней школе разделам и ознакомиться с некоторыми новыми разделами математики (аналитической геометрией, теорией дифференциальных уравнений, теорией вероятностей, и др.), которые обогащают общую культуру, развивают логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный специалист в своей деятельности.

2. Методика обучения математике связана с такими науками, как философия, психология, педагогика, логика, информатика, история математики и математического образования, физиология человека, и прежде всего с математикой — ее базовой дисциплиной. Цель методики - отобрать основные данные математической науки и, дидактически обработав и адаптировав их, включить в содержание школьных курсов математики.

Философия разрабатывает методы познания, которые используются в педагогических, методических исследованиях и в обучении математике: системный подход (компоненты методики преподавания математики и их взаимосвязь); методы научного познания (аналогия, обобщение, конкретизация, абстрагирование и т. д.); философские законы; диалектический метод познания.

Логика исследует законы «правильного» мышления. Такие понятия, как выражение, теорема, доказательство, уравнение, правило вывода, являются логическими понятиями. Доказательства математических утверждений базируются на логических действиях. Формирование математических понятий осуществляется на основе логических законов.

Методика преподавания математики тесно связана с педагогикой, в частности с дидактикой. В дидактике основным отношением, характеризующим обучение, является «преподавание — учение», в методике — «преподавание — учебный материал — учение». Педагогика определяет методы обучения, цели воспитания, методы научного исследования. Взяв за основу эти методы и цели из педагогики, методика вносит как в учебный процесс, так и в научные исследования свое конкретное математическое содержание.

Методика обучения математике ориентируется на особенности учащихся определенных возрастных групп с использованием закономерностей индивидуальных особенностей школьников в определенном возрасте (память, мышление, внимание и т. д.). Влияние психологии на методику обучения математике усиливается в связи с внедрением личностно ориентированного образования, характеризующегося усилением внимания к ученику, его саморазвитию, самопознанию, к воспитанию умения искать и находить свое место в жизни.

Методика обучения математике связана с историей математики. Она обращает внимание учителя на трудности, с которыми он может встретиться при изучении школьного курса математики, придает математическим знаниям личностно значимый характер.

Информатика — наука, изучающая проблемы получения, хранения, преобразования, передачи и использования информации. В последнее время, в связи с развитием информатики, усиливается ее влияние на методику обучения математике: формируется определенный стиль мышления, связанный с использованием компьютера, кодированием информации; применяются информационные технологии, ориентированные на повышение эффективности обучения математике.

Методика обучения математике не может не учитывать данных физиологии, особенно в исследованиях, например, при изучении рефлексов, связанных с сигналами, поступающими как от материальных предметов и явлений, так и от слов, символов, знаков.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Назовите цель изучения математики в средних специальных учебных заведениях.
2. Охарактеризуйте взаимосвязь математики с другими науками.

Радел 1. Алгебра

Тема 1.1. Развитие понятия о числе.

Основные понятия и термины по теме*: Натуральные числа, целые числа, рациональные, иррациональные, комплексные числа. абсолютная, относительная погрешность, мнимая единица.*

План изучения темы:

1. История развития понятия числа. Целые и рациональные числа. Действительные числа
2. Приближенные вычисления.
3. Комплексные числа.

Краткое изложение теоретических вопросов:

1. Натуральные числа: $N = \{1, \ 2, \ 3, \ \ldots\}$.

Числа, используемые для счёта предметов, т. е. числа 1**,** 2**,** 3**,** 4**,** 5...**,**
называют натуральными числами.

Более широкий класс чисел составляют целые числа. К ним относятся натуральные числа, число 0 и числа −1,−2,−3,−4,−5...

Множество натуральных чисел обозначают буквой N, множество целых чисел — буквой Z.

Вместо фразы «n — натуральное число» используют запись $n \in N$, а вместо фразы «m— целое число» — запись $m \in Z$.

Делимость натуральных чисел

Пусть даны два натуральных числа — a и b. Если существует натуральное число q такое, что выполняется равенство a=bq, то говорят, что число a делится на число b. При этом число a называют делимым, b — делителем, q — частным. Число a называют также кратным числа b.

Вместо фразы «a делится на b» часто используют запись a⋮b.

Уточним,
запись 6:3 означает требование выполнить деление числа 6 на число 3 (в результате получится число 2), а запись 6⋮3 означает, что число 6 делится на 3 (делится нацело, без остатка).
Если натуральное число a не делится на натуральное число b, то рассматривают деление с остатком.
Пример:
при делении числа 23 на число 10 в частном получается 2 (неполное частное) и в остатке — 3. При этом имеет место соотношение 23=10⋅2+3.

Если натуральное число a больше натурального числа b, и a не делится на b, то существует, и только одна, пара натуральных чисел q и r — причём r<b — такая, что выполняется равенство
a=bq+r.

Для a=23, b=10 такая пара чисел найдена выше: q=2, r=3 — при этом остаток r меньше делителя b.

Целыми числами $Z = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ называются числа вида n, -n и 0, где n - натуральное число, а рациональными - числа вида p/q, где p и q - целые числа и $q \neq 0$

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \ m \in Z,\ n \in N \right\}.$$

.

Рациональные числа — это числа вида mn**, где** m **— целое число, а** n **— натуральное число.**

Множество рациональных чисел принято обозначать буквой Q.

Выполняется соотношение Z⊂Q , поскольку любое число m можно представить в виде m1.
Итак, можно сказать, что
рациональные числа — это все целые числа, а также положительные и отрицательные обыкновенные дроби.

Любая десятичная дробь как частный случай обыкновенной дроби тоже является рациональным числом.

Для рациональных чисел, кроме указанной выше записи mn, можно использовать другой вид записи, который рассмотрен ниже.
Рассмотрим целое число 7, обыкновенную дробь 511 и десятичную дробь 4,244. Целое число 7 можно записать в виде бесконечной десятичной дроби 7,0000...
Десятичную дробь 4,244 тоже можно записать в виде бесконечной десятичной дроби 4,244000...
Для числа 511 воспользуемся методом «деления углом»:

```
_5,000000...|11
  0         |0,454545...
 _50
   44
  _60
    55
   _50
     44
    _60
     ....
```

Как видите, после запятой происходит повторение одной и той же группы цифр: 45,45,45... Таким образом, 511 =0,454545...

Короче это записывают так: 0,(45).

Повторяющуюся группу цифр после запятой называют периодом, а саму десятичную дробь — бесконечной десятичной периодической дробью.

Число 7 также можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.
Для этого надо в периоде записать число 0:
7=7,00000...=7,(0).
Так же обстоит дело и с числом 4,244:
4,244=4,244000...=4,244(0).
Чтобы всё было аккуратно, говорят так: 4,244 — конечная десятичная дробь,
а 4,244000... — бесконечная десятичная дробь.
Вообще любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Верно и обратное: любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Пример:

записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь

а) 1,(47)*;* *б)* 1,3(47).

Решение

а) Пусть x=1,(47)*, т. е.* x = 1,474747...
Умножим x *на такое число, чтобы запятая передвинулась вправо ровно на один период. Поскольку в периоде содержатся две цифры, надо, чтобы запятая передвинулась вправо на две цифры, а для этого число* x *нужно умножить на* 100*. Получим:*
100x=147,474747...
Следовательно,
_ 100x=147,474747...
x=1,474747...

100x−x=147,474747...−1,474747...
99x=146*;*
x=14699*.*
Итак, 1,(47)= 14699 =1 4799*.*

б) Пусть x=1,3(47)=1,3474747*... Сначала умножим* x *на* 10*, чтобы в полученном произведении период начинался сразу после запятой:* 10x=13,474747*... Теперь число* 10x *умножим на* 100 *— тогда запятая сместится ровно на один период вправо:*
1000x=1347,474747...
Имеем:
_1000x=1347,474747...
10x=13,474747...

990x=1334*;*
x= 1334990 = 667495 =1 172495*.*

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Иррациональные числа

Числа, которые не являются рациональными, то есть не являются ни целыми, ни представимыми в виде дроби вида mn**, где m — целое число, а n — натуральное, называются иррациональными.**

Также можно сказать, что
иррациональным числом называют бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Пример:
0,547... 557505... 113456...

Иррациональные числа можно встретить, извлекая квадратный и кубический корень:
3–√ = 1,732050... — иррациональное число,
7–√3 = 1,912931... — иррациональное число.

Одним из известных и часто используемых в математике иррациональных чисел является π; чтобы его получить, нужно длину любой окружности разделить на её диаметр, и получится:
π = 3,141592...
Любая арифметическая операция над рациональными числами (кроме деления на 0) в результате приводит к рациональному числу.
С иррациональными числами же всё не так просто, может получиться как рациональное, так и иррациональное число.

Пример:
3–√⋅3–√=3 — *рациональное число,*
3–√⋅5–√=15−−√ — *иррациональное число.*

Действительное число 0 (нуль) обладает свойствами $a + 0 = a$, $a * 0 = 0$ для каждого действительного числа a.

(Единственное) противоположное число -a и (единственное) обратное число $a^{-1} = 1/a$ для действительного числа a определяются соответственно так:

$a + (-a) = a - a = 0$, $aa^{-1} = 1$ ($a \neq 0$).

Законы действий над числами

Переместительный закон сложения: $a + b = b + a$.

Сочетательный закон сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Переместительный закон умножения: $ab = ba$.

Сочетательный закон умножения: $(ab)c = a(bc)$.

Распределительный закон умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$.

Распределительный закон умножения относительно вычитания: $(a - b)c = ac - bc$.

Дробные выражения

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ c \neq 0.$

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad -\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b},$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$
$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c,$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

2. Практическая деятельность человека неразрывно связана с числами, которые можно получать тремя способами: в результате измерений, счета и выполнения математических операций.

Однако:

- Любое измерение нельзя выполнить точно: ошибку дает либо прибор, либо наблюдатель.

- Счет дает точные результаты, только если количество предметов невелико и если оно постоянно во времени.

- Далеко не все математические операции можно выполнить абсолютно точно.

В этих случаях мы имеем дело с приближенными числами. Но при вычислениях важно знать отклонение приближенного значения величины от ее точного значения, для этого вводится понятие абсолютной погрешности приближения.

Определение. Абсолютной погрешностью приближения называется модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением.

$\Delta = |a-x|$, где Δ – абсолютная погрешность
a – точное значение величины
x – приближенное значение

$\Delta = |a-x| \Rightarrow$ a - x= $\pm$ $\Delta \Rightarrow$ a = x $\pm$ Δ

Пример. Найти абсолютную погрешность приближения 0,44 числа 4/9.

$$\Delta = \left|\frac{4}{9}-0{,}44\right| = \left|\frac{4}{9}-\frac{11}{25}\right| = \left|\frac{100-99}{225}\right| = \frac{1}{225}$$

На практике во многих случаях точное значение бывает неизвестно, поэтому абсолютную погрешность найти нельзя. Однако можно дать оценку абсолютной погрешности, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Определение Границей абсолютной погрешности Δ приближения называется такое положительное число h больше которого абсолютная погрешность быть не может.

$\Delta = |a-x| \leq$ h

Пример. $\frac{1}{225}=0{,}004444...$ < 0,0045

$x - \Delta$ – Нижняя граница (Н.Г.)

$x + \Delta$ – Верхняя граница (В.Г.)

Приближенные числа, как и точные записываются как правило при помощи десятичных дробей. Но если в записи точного числа все его цифры верные, то в приближенном некоторые его цифры верные, а другие являются сомнительными.

Определение. Цифра называется верной (точно значащей), если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы того разряда в котором записана эта цифра. В противном случае она называется сомнительной.

Пример. $x = 3,7412 \pm 0,002$

Определить верные и сомнительные цифры.

В.Г. = 3,7412 + 0,002 = 3,7432

Н.Г. = 3,7412 - 0,002 = 3,7392

Верные – 3 и 7, сомнительные 4,1 и 2.

Замечания.

1. В записи приближенного числа сохраняются только верные цифры. x = 3,7
2. Если в десятичной дроби последние верные цифры нули, то они остаются в записи числа.

$x = 0,301 \pm 0,001$

В.Г. = 0,302 Н.Г. = 0, 300 $\Rightarrow$ x = 0,30

3) В десятичной записи числа значащими цифрами называются все его верные цифры, начиная с первой слева отличной от нуля.

0, 583; 38,57; 38,507; 29,830

Правило округления чисел: Если первая слева отбрасываемая цифра меньше 5, то округляют с недостатком, если это цифра 5 или больше, то округляют с избытком.

Пример. 5,739 (с точностью до 0,01) $\approx$ 5,74

3, 53 (с точностью до целых) $\approx$ 4

30253 (с точностью до 1000) $\approx$ 30000

Но абсолютной погрешности не достаточно для полной характеристики приближения.

Если измерять расстояние между двумя городами, которое равно 100 км, с точность до 1 м, то это будет точное измерение, а если с точность до 1м измерена длина участка земли, которая равна 10м, то это грубое измерение.

Определение. Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению измеряемой величины. Обычно выражается в процентах.

$\omega = \frac{\omega}{x}$; $\omega\% = \frac{\omega}{x} \cdot 100\%$

Т.о. для более полной оценки точности измерений необходимо определить, какую часть, или сколько процентов, составляет абсолютная погрешность от значения данной величины.

Пример. Сравнить точность двух измерений .

$d = 4 \pm 0,3$; $H = 600 \pm 0,3$

$\omega(d) = \frac{0,3}{4} = \frac{3}{10} \div 4 = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{40} = 0,075 = 7,5\%$

$\omega(H) = \frac{0,3}{600} = \frac{3}{10} \div 600 = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{600} = \frac{3}{6000} = \frac{1}{2000} = 0,5 \cdot 0,001 = 0,0005 = 0,05\%$

Второе измерение более точное.

3. Комплексными числами называются числа вида $a+вi$, где a и $в$ - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется мнимой единицей, если для этих чисел понятия равенства и действия сложения и умножения определены следующим образом:

1). Два комплексных числа $a_1+в_1i$ и $a_2+в_2i$ называются равными, если $a_1=a_2$, $в_1=в_2$;

2). Суммой двух комплексных чисел и называется комплексное число $(a_1+a_2)+(в_1+в_2)i$;

3). Произведением двух комплексных чисел и называется комплексное число $(a_1a_2-в_1в_2)+(a_1в_2+a_2в_1)i$;

Запись комплексного числа в виде $z=a+вi$ называется алгебраической формой записи комплексного числа, где называется действительной частью комплексного числа, а -мнимой частью.

Сложение и умножение комплексных чисел мы ввели в определении комплексного числа. Введем правила вычитания и деления комплексных чисел: $(a_1+в_1i)-(a_2+в_2i)=(a_1-a_2)+(в_1-в_2)i$;

$$\frac{a_1+в_1i}{a_2+в_2i}=\frac{a_1a_2+в_1в_2}{a_2^2+в_2^2}+\frac{a_2в_1-a_1в_2}{a_2^2+в_2^2}i.$$

Но удобнее всего действия над комплексными числами производить с помощью правил соответствующих действий над многочленами и понятием мнимой единицы.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Дайте определение действительным числам.
2. Перечислите правила округления чисел.
3. Охарактеризуйте понятие мнимая единица.

Тема 1.2. Корни, степени и логарифмы.

Основные понятия и термины по теме: *Корни, степени, логарифмы, десятичный и натуральный логарифмы.*

План изучения темы:

1. Степень с рациональным показателем и ее свойства. понятие о степени с действительным показателем. Свойства степени с действительным показателем.
2. Логарифм. Логарифм числа. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами.
3. Преобразование простейших выражений, включающих арифметические операции, а также операцию возведения в степень и операцию логарифмирования выражений.

Краткое изложение теоретических вопросов:

1.Корень n-й степени из действительного числа

Теория:

Корнем n**-й степени** (n=2,3,4,5...) **из числа** *a* **называется такое число** b**,** n**-я степень которого равна** *a***, то есть**
a–√n=b,bn=a**.**

Нахождение корня n-ой степени из числа a называется извлечением корня n-ой степени.
Это число обозначают a–√n,
число *a* называют **подкоренным числом**,
а число n — **показателем корня**.

Если n=2, то пишут a–√ (2 не пишут) и говорят «корень квадратный из a».
Если n=3, то пишут a–√3 и вместо «корень третьей степени» часто говорят «корень кубический».

Если n — **чётное число**, то существует корень n-й степени из любого неотрицательного числа (положительного или равного нулю).
- Если a<0, то корень n-ой степени из a не определён. Корень чётной степени из отрицательного числа не существует.
- Если a≥0, то неотрицательный корень a–√n
называется **арифметическим корнем** n-ой степени из a.
Пример:
корень четвёртой степени из числа 16 *равен* 2 *, т. е.*
16––√4 =2 *. Так как* 24=16.

−16−−−−√4 *не имеет смысла.*

Если n — **нечётное число**, то существует **единственный** корень n-й степени из любого числа (положительного, отрицательного или равного нулю), при этом −a−−−√n=−a−√n.
Это равенство позволяет выразить корень нечётной степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени.

Пример:
8−√3=2*;*

−8−−−√3=−8−√3=−2.

Если a≥0, то (a−√n)n=a, а также an−−√n=a.

Пример:
(11−−√7)7=11;138−−−√8=13.

1.Степень с целым показателем
$a^n = a \cdot a \cdots a$ (n раз, $n \in N,\ n \neq 1$),
$a^1 = a,\ a^0 = 1 \quad (a \neq 0),\quad a^{-n} = 1/a^n \quad (a \neq 0).$

Свойства:
$a^m a^n = a^{m+n},\quad a^m/a^n = a^{m-n},\quad \left(a^m\right)^n = a^{mn},$

$(ab)^n = a^n b^n,\quad (a/b)^n = a^n/b^n.$

Корень n-й степени
$\sqrt[n]{a}$ - арифметический корень n-й степени из числа $a,\ a \geq 0,$ $\sqrt[n]{a} \geq 0,\quad n \in N,\quad n > 1.$

Свойства:
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$

$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} \qquad (b > 0),\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$

В частности, $\sqrt{a}$ - арифметический квадратный корень: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\quad \sqrt{a^2} = |a|$

Степень с дробным (рациональным) показателем
$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},\quad m \in Z,\quad n \in N,\quad n \geq 2,\quad a > 0.$

Свойства степени с действительным показателем
$(a > 0,\quad b > 0,\quad x \in R,\quad y \in R)$

$a^x a^y = a^{x+y},\quad \left(a^x\right)^y = a^{xy},\quad (ab)^x = a^x b^x,$

$$(a/b)^x = a^x/b^x, \quad a^x = b^{x\log_b a},$$
$$a^x = e^{x\ln a} = \exp(x\ln a), \quad a^x = 10^{x\lg a}.$$

2.Уравнение вида х в степени n = a

Теория:

Уравнение вида xn=a, где a>0,n∈N,n>1, в случае чётного n имеет
два корня −a–√n,a–√n,
в случае нечётного n — один корень a–√n

(читают: корень n-ой степени из числа a).

Решая уравнение xn=0, получаем единственный корень x=0.

Обрати внимание!

1. Если показатель корня — чётное число, то уравнение имеет два корня;
2. если показатель корня — нечётное число, то уравнение имеет один корень.

Пример:
1. реши уравнение: x4=625.
Решение: по определению корня n*-ой степени*
x1=625−−−√4=5;x2=−625−−−√4=−5
уравнение имеет два корня.
Ответ: x1=5,x2=−5.

2. Реши уравнение: x6=11.
Решение:
по определению корня n*-ой степени*
x=±11−−√6;x1=11−−√6;x2=−11−−√6
уравнение имеет два корня.
Ответ: x1=11−−√6,x2=−11−−√6.

3. Реши уравнение: x7=13.
Решение: уравнение имеет один корень x=13−−√7.

Рассмотрим случай уравнения xn=a при *a*<0

Обрати внимание!

1. Если показатель корня — чётное число, то уравнение не имеет корней;
2. если показатель корня — нечётное число, то уравнение имеет один корень.

Пример:

1. реши уравнение: x8=−7.
Решение: уравнение не имеет корней.

2. Реши уравнение: $x9=-4$.
Решение: по определению корня n*-ой степени*
$x=-4–\sqrt{}9$
уравнение имеет один корень.

3. Реши уравнение: $x3=-8$.
Решение: $-8———\sqrt{}3=-8–\sqrt{}3=-2$*;*
$x=-2$.
Уравнение имеет один корень.

3.Простейшие иррациональные уравнения

Теория:

Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называются иррациональными.

Решение иррациональных уравнений обычно сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению путём возведения в степень n обеих частей уравнения.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:
1. если показатель корня — чётное число, то подкоренное выражение и значение корня не должны быть отрицательными;

2. если показатель корня — нечётное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом;

3. при возведении обеих частей уравнения в чётную степень могут возникать посторонние корни, поэтому при использовании данного метода необходимо делать проверку или находить область допустимых значений.
Пример:
1. решить уравнение $3x-2—————\sqrt{}4=2$.
Решение:
ОДЗ.
$3x-2\geq0;3x\geq2/ :3;x\geq23$.
Возведём обе части уравнения в четвёртую степень:
$3x-2=16$*;*
$3x=16+2$*;*
$3x=18$*;*
$x=6\in$ *ОДЗ.*
Ответ: $x=6$.

2. Решить уравнение $x2-24——————\sqrt{}=1$.
Решение: возведём обе части уравнения в квадрат:

x2−24=1;x2=24+1;x2=25.
Полученное неполное квадратное уравнение имеет два корня: −5 *и* 5.
Произведём проверку полученных корней, для этого подставим значения переменной x *в исходное уравнение.*

Проверка
При x1=−5(−5)2−24−−−−−−−−−−√=25−24−−−−−−−√=1−√=1 *— верно.*
При x2=552−24−−−−−−−√=25−24−−−−−−−√=1−√=1 *— верно.*
Значит, исходное иррациональное уравнение имеет два корня.
Ответ: −5 *и* 5.

3. Решить уравнение 9−2x−−−−−−√8=−12.
Решение: уравнение не имеет корней. Корень чётной степени — неотрицательное число.
Реши уравнение 5x+7−−−−−−√3=−2.
Решение: возведём обе части уравнения в куб:
5x+7=−8;5x=−8−7;5x=−15;x=−3.
Ответ: x=−3.

2. $\log_a b \quad (a>0,\ \ a\neq 1,\ \ b>0)$ - логарифм числа b по основанию a.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b.$

$\lg b$ - десятичный логарифм (логарифм по основанию 10): $10^{\lg b} = b.$

$\ln b$ - натуральный логарифм (логарифм по основанию e): $e^{\ln b} = b.$

Переход от одного основания к другому:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Свойства логарифмов (u, v >0):

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a (uv) = \log_a u + \log_a v,$$

$$\log_c \frac{1}{v} = -\log_c v, \quad \log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v,$$

$$\log_a u^\alpha = \alpha \log_a u, \quad \log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u, \quad n\in N, \quad n\neq 1.$$

4.Понятие логарифма

Теория:
Показательное уравнение вида 3x=5 можно решить с помощью введения нового символа log3,
тогда корень уравнения x= log35 (логарифм числа 5 по основанию 3).

Логарифмом положительного числа b **по положительному и отличному от** 1 **основанию** a

называют показатель степени, в которую нужно возвести число a**, чтобы получить число** b**.**
logab= c**,** ac=b**, где** a>0,a≠1,b>0.

Пример:
1. log39= 2*, так как* 32=9*.*

2. log1749= −2*, так как* (17)−2=49*.*

3. Найти x*:*
log2−−√4–√3 = x*.*
По определению логарифма
(2–√)x=4–√3;2x2=413;2x2=(22)13;2x2=223;x2=23;x=2⋅23;x=43*.*

Обрати внимание!

Из определения логарифма следуют формулы:

logaa=1;
loga1=0;
loga(ac)=c.

Пример:
log88=1*, так как* 81=8*;*
log251=0*, так как* 250=1*;*
log7735=35*.*

Логарифм по основанию 10 **называют десятичным логарифмом, вместо** log10b **пишут** lgb**.**

Логарифм по основанию *e***, где** *e* **— иррациональное число, приближенно равное** 2,7**, называют натуральным логарифмом. Вместо** logeb **пишут** lnb**.**

3. Пример 1. Упростите выражение $\left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}$.

Решение. Проведем тождественные преобразования в ОДЗ:

$$\left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-1+x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)}{x^{\frac{1}{3}}-1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}=\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{1}{3}}+1$$

.

Ответ. Если $x \neq 1$, то $x^{\frac{1}{3}}+1$, если $x=1$, то выражение не имеет смысла.

Замечание. Ответ в данном случае можно было записать в виде $\sqrt[3]{x}+1$, т.е. $\sqrt[3]{x}+1=x^{\frac{1}{3}}+1$. Но левая часть этого равенства определена для любого x, а правая только для $x \geq 0$.

Небрежное отношение к ОДЗ алгебраического выражения приводит, например, к тому, что уравнение

$$\left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}=-1$$

имеет решение,

$$\sqrt[3]{x}+1=-1 \quad \Rightarrow \quad x=-8,$$

что никак не удовлетворяет левой части заданного уравнения.

Пример 2. Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Решение. Проведем упрощения

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+4\sqrt{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\frac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2}{x-1}+4\sqrt{x}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\frac{4\sqrt{x}}{x-1}+4\sqrt{x}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{4\sqrt{x} \cdot x}{x-1}$$

.Ответ. Если $x>0,\ x \neq 1$, то $4x$, если $x \leq 0$ или $x=1$, то выражение не имеет смысла.

Пример 3. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$.

Решение. Домножим дробь на сопряженное:

$$\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{35}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}} \cdot \sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{6-\sqrt{35}}{\sqrt[3]{36-35}}+\sqrt{35}=6-\sqrt{35}+\sqrt{35}=6$$

.

Ответ. 6.

Пример 4. Найдите значение выражения $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$ при $x=2010$.

Решение. Пусть $t=\sqrt{x-4}$, тогда $x=t^2+4$. И исходное выражение имеет вид

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=\sqrt{t^2+4-4t}-\sqrt{t^2+4+4t}=\sqrt{(t-2)^2}-\sqrt{(t+2)^2}=|t-2|-|t+2|=|\sqrt{x-4}-2|-|\sqrt{x-4}+2|$$

.

При $x = 2010$ имеем
$|\sqrt{x-4}-2|-|\sqrt{x-4}+2| = \sqrt{x-4}-2-\sqrt{x-4}-2=-4$.

Ответ. -4

5.Основные свойства логарифмов

Теория:

Рассмотрим основные свойства логарифмов, которые часто применяются при вычислениях, при решении логарифмических уравнений и неравенств.
Свойства, приведённые ниже, выполняются, если a>0,a≠1,b>0,c>0,r — любое действительное число.

1. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел:
loga(bc)=logab+logac.

Пример:
1. log345=log3(9·5)=log39+log35=2+log35*;*

2. log64+log69=log636=2*;*

3. lg2+lg5=lg(2·5)=lg10=1*.*

2. Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя:
logabc=logab−logac.

Пример:
1. log13(53)=log135−log133=log135+1*;*

2. log2346−log232=log2323=1*.*

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени:
logabr=rlogab.

Пример:
1. log2217=17log22=17·1=17*;*

2. lg13=lg3−1=−lg3*;*

3. 2log37=log372=log349*.*

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Перечислите свойства степеней.
2. Перечислите свойства корней.
3. Сформулируйте определение логарифма.

Тема 1.3. Основы тригонометрии.

Основные понятия и термины по теме*: Радианная мера угла, синус, косинус, тангенс и котангенс числа. арксинус, арккосинус, арктангенс числа.*

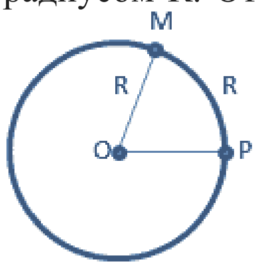
План изучения темы:

1. Радианная мера угла.
2. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.
3. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла. Формулы половинного угла.
4. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.
5. Простейшие тригонометрические уравнения. Решения тригонометрических уравнений.

Краткое изложение теоретических вопросов:

1.Наравне с градусной мерой угла используется радианная.

Возьмем на координатной плоскости окружность с центром в точке O и радиусом R. Отметим на ней дугу PM, длина которой равна R и угол POM.



Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

Градусная мера угла в 1 радиан равна:

Так как дуга длиной πR (полуокружность), стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R, стягивает угол в π раз меньший, т.е.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)$$

И наоборот

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}$$

Так как π = 3,14, то 1 рад = 57,3°

Если угол содержит *a* радиан, то его градусная мера равна

$$a \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot a\right)$$

И наоборот

$$a^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot a \text{ рад}$$

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Например, 360° = 2π рад, пишут 360° = 2π

Синусом угла *а* называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол *а.*

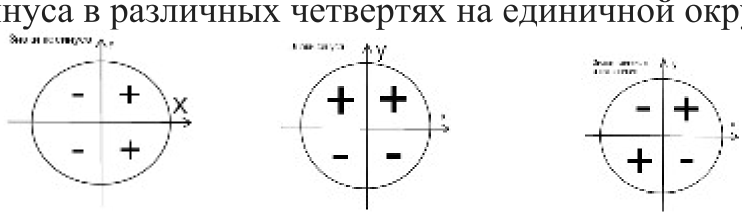
Косинусом угла *а* называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол *а.*

Наиболее часто встречающиеся значения синуса и косинуса приведены в таблице:

Тангенс угла – это отношение синуса этого угла к косинусу этого же угла.

Котангенс угла – это отношение косинуса этого угла к синусу этого же угла.

Знаки тангенса и котангенса можно определить, зная знаки синуса и косинуса в различных четвертях на единичной окружности:

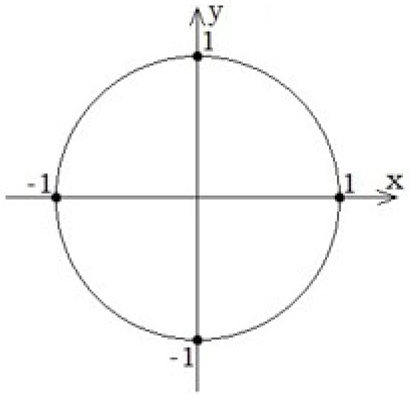


Числовая окружность

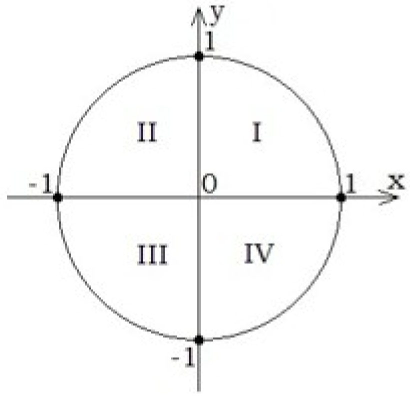
В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую окружность, но удобнее использовать единичную окружность.

Единичная окружность — окружность, центр которой расположен в начале координат и радиус которой равен 1.

Единичную окружность с установленным соответствием между действительными числами и точками окружности называют числовой окружностью.



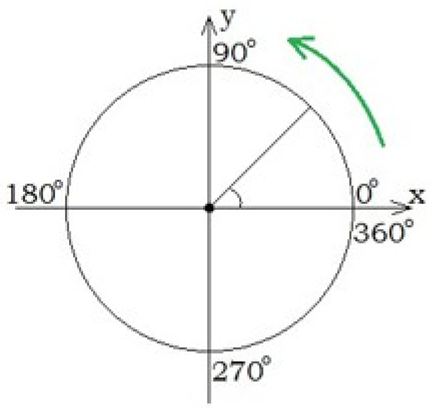
Запомните порядок квадрантов!



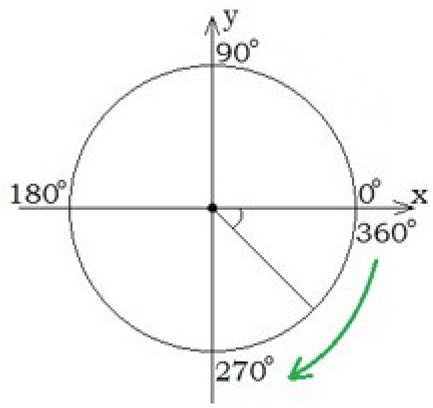
Угол, которыйобразован положительным направлением осиOXи лучомOA, называетсяуглом поворота.

Важно запомнить, где находятся углы0°;90°;180°;270°;360°.

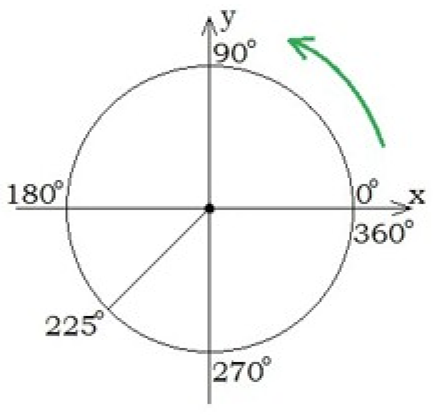
Если A перемещается против часовой стрелки, получаются положительные углы



Если A перемещается по часовой стрелке, получаются отрицательные углы



Обозначьте наединичной окружности угол225°.

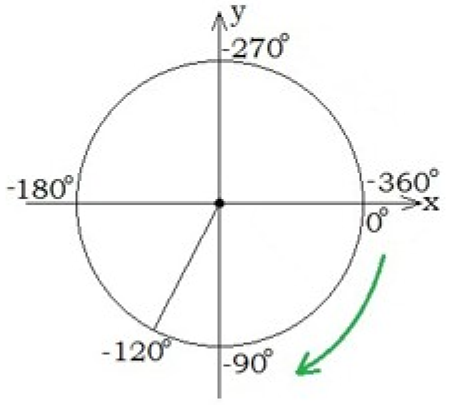


1) Определяем, в каком квадранте находится угол: он больше 180° и меньше 270°, значит, в III квадранте.

2) Вычисляем, на сколько градусов этот угол отличается от угла 180°.

225° =180° + 45°

Обозначьте на единичной окружности угол−120°.



Угол обозначается в отрицательном направлении. Он находится в III квадранте.
Решение:
−120° =−90° + (−30°)

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы двойного и тройного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Формулы суммы и разности синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Формулы суммы и разности косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Формулы суммы и разности тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму (разность):

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2},$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида

$\sin x = a$,

$\cos x = a$,

$tgx = a$,

$ctgx = a$.

Уравнение $\sin x = a$.

Так как множество значений функции $y = \sin x$ - отрезок [-1;1], то данное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $|a| \le 1$.

Далее, из-за периодичности функции $y = \sin x$, каждому значению a соответствует бесконечное множество решений. Поэтому все решения описываются формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \ k \in Z \end{cases}$$

или обобщенной формулой

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in Z.$$

На рисунке 1 члены первой последовательности отмечены кружками, а второй - квадратами.

Заметим, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. $x = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, \ k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z$.

Уравнение $\cos x = a$.

Данное уравнение имеет тогда и только тогда, когда $|a| \le 1$.

Множество решений записывается в виде

$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$.

Заметим, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Пример. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решение. $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ:

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$ *Уравнение* $tgx = a$.

Данное уравнение разрешимо при любом a. Все решения задаются формулой

$x = arctga + \pi k,\ k \in Z$.

Заметим, что $arctg(-a) = -arctga$.

Пример. Решить уравнение $tgx = \sqrt{3}$.

Решение. $x = arctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $ctgx = a$.

Данное уравнение разрешимо при любом a. Все решения задаются формулой

$x = arcctga + \pi k,\ k \in Z$.

Заметим, что $arcctg(-a) = \pi - arcctga$.

Пример. Решить уравнение $ctgx = \sqrt{3}$.

Решение. $x = arcctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Обратные тригонометрические функции

Основные обратные тригонометрические функции:

1. $arcsinx$ – арксинус;

2. $\arccos x$ – арккосинус;

3. $arctgx$ – арктангенс;

4. $arcctgx$ – арккотангенс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Арксинусом числа х, где $¿ x \vee \leq 1$, называется такое число α из промежутка $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен х.

Арксинус является нечетной функцией, то есть: $\arcsin(-x) = \arcsin(x)$.

ПРИМЕР 1

Задание Найти значения обратных тригонометрических функций:

1. $\arcsin\frac{1}{2}$
2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

Решение

1. 1) Вычислим значение $\arcsin\frac{1}{2}$, для этого нам нужно найти такой угол α из промежутка $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, чтобы $sin\alpha = \frac{1}{2}$. Воспользуемся таблицей значений синуса:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Выбираем в строке значений синуса значение, равное $\frac{1}{2}$ и определяем, что этому значению соответствует угол $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Так как $\frac{\pi}{6} \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то получаем: $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

2) Вычислим значение $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

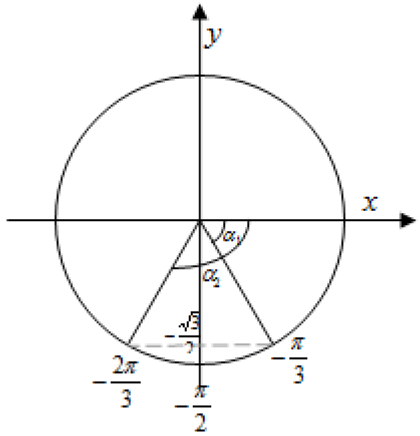


Рис. 1

Первый способ. Найдем угол α из промежутка $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, такой что $sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$. Воспользуемся тригонометрическим кругом (рис. 1). Значениям синуса соответствуют точки на оси *Oy*. Отметим на ней значение $\frac{-\sqrt{3}}{2}$. Этому значению соответствует $\alpha_1=\frac{-\pi}{3}$ и $\alpha_1=\frac{-2\pi}{3}$, но промежутку $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только $\alpha_1=\frac{-\pi}{3}$. Таким образом, $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\pi}{3}$.

Второй способ. Используем то, что функция арксинус нечетная, тогда , , $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. А , $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ найдем, используя таблицу значений синуса: $sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Тогда окончательно имеем $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\pi}{3}$.

Ответ

$$1)\ \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}\ ,\ \ 2)\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

ПРИМЕР Д/З ***Выполнить задание в рабочей тетради, по предыдущему образцу, используя один из способов.***

Задание *Найти значения обратных тригонометрических функций:* $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Арккосинус числа x, где ¿ $x\vee\le 1$, называется такое число α из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен x.

Для арккосинуса справедливо следующее равенство

$$\arccos(-x)=\pi-arccosx$$

ПРИМЕР 2

Задание Найти значения обратных тригонометрических функций:

$$\arccos\frac{1}{2}, \arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

Решение Для вычисления значение $\arccos\frac{1}{2}$, необходимо найти такой угол α из промежутка $[0;\pi]$, чтобы $cos\alpha=\frac{1}{2}$. Воспользуемся таблицей значений косинуса:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Выбираем в строке значений косинуса значение, равное $\frac{1}{2}$ и определяем, что ему соответствует угол $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Так как $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$, то получаем: $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Вычислим значение .$\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

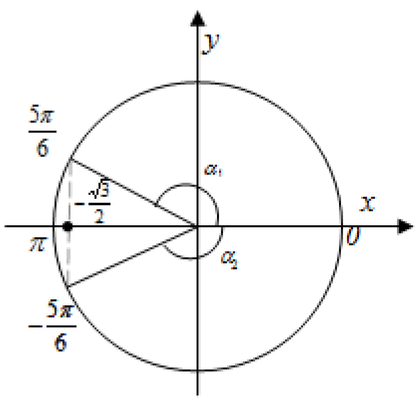


Рис. 2

Первый способ. Найдем угол α из промежутка $[0;\pi]$, такой что $cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$. Воспользуемся тригонометрическим кругом (рис. 2). Значениям косинуса соответствуют точки на оси Ox. Отметим на ней значение $cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$. Значению $cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ соответствует два угла $\alpha_1=\frac{5\pi}{6}$ и $\alpha_2=\frac{-5\pi}{6}$. Промежутку $[0;\pi]$ принадлежит только $\alpha_1=\frac{5\pi}{6}$, тогда, $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$.

Второй способ. Воспользуемся равенством $\arccos(-x)=\pi-arccox$. Тогда $\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдем $ar\,ccos\frac{\sqrt{3}}{2}$, используя таблицу значений косинуса. Получим, что значению $cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ соответствует $\alpha=\frac{\pi}{6}$. Тогда используя последнее равенство

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{6\pi-\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

Ответ $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$

ПРИМЕР Д/З: ***Выполнить задание в рабочей тетради, по предыдущему образцу, используя один из способов.***

Задание *Найти значения обратных тригонометрических функций:* $\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Арктангенсом числа x, называется такое число α из промежутка $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, что $tg\alpha=x$.

Арктангенс функция нечетная, поэтому для нее справедливо следующее равенство

$arctg(-x)=-arctgx$

ПРИМЕР 3

Задание Найти значения обратных тригонометрических функций: $arctg\sqrt{3}$ и $arctg(-1)$

Решение Определим значение $arctg\sqrt{3}$. Для этого необходимо найти такой угол α из промежутка $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, что $tg\alpha=\sqrt{3}$. Воспользуемся таблицей значений тангенса

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

Находим в строке значений тангенса значение $\sqrt{3}$, ему соответствует угол $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Это значение принадлежит промежутку $\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому

$$arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

Найдем значение $arctg(-1)$. Учитывая, что арктангенс нечетная функция, получим

$$arctg(-1)=-arctg\,1$$

Значение $arctg\,1$ найдем по таблице значений тангенсов. По ней значению $tg\alpha=1$ соответствует угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Таким образом

$$arctg(-1)=\frac{-\pi}{4}.$$

Ответ

$$arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

$$arctg(-1)=\frac{-\pi}{4}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Арккотангенсом числа x называются такое число α из промежутка $(0;\pi)$, что $ctg\alpha = x$.

Для функции арккотангенс справедливо следующее равенство

$$arctg(-x) = \pi - arctgx$$

ПРИМЕР 4

Задание Найти значения обратных тригонометрических функций:

$$arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}, arcctg(-\sqrt{3})$$

Решение Начнем с определения значения первого арккотангенса.

По определению арккотангенса необходимо найти такой угол α из промежутка $(0;\pi)$, что $ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Воспользуемся таблицей значений котангенса.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Найдем в ней значение $ctg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, этому значению соответствует угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Найденный угол принадлежит промежутку $(0;\pi)$. Таким образом,

$$arcctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Для нахождения значения $arcctg(-\sqrt{3})$ воспользуемся равенством

$$arctg(-x) = \pi - arctgx$$

В нашем случае оно примет вид

$$arctg(-\sqrt{3}) = \pi - arctg\sqrt{3}$$

Теперь осталось определить значение $arctg\sqrt{3}$. Как и в предыдущем случае, воспользуемся для этого таблицей значений котангенса. Значению $ctg\alpha=\sqrt{3}$ соответствует угол $\alpha=\frac{\pi}{6}$, он принадлежит промежутку $(0;\pi)$, тогда $arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$. Возвращаясь к последнему равенству, окончательно получим

$$arcctg(-\sqrt{3})=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

Ответ $\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$

Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$$\sin x \, V a$$

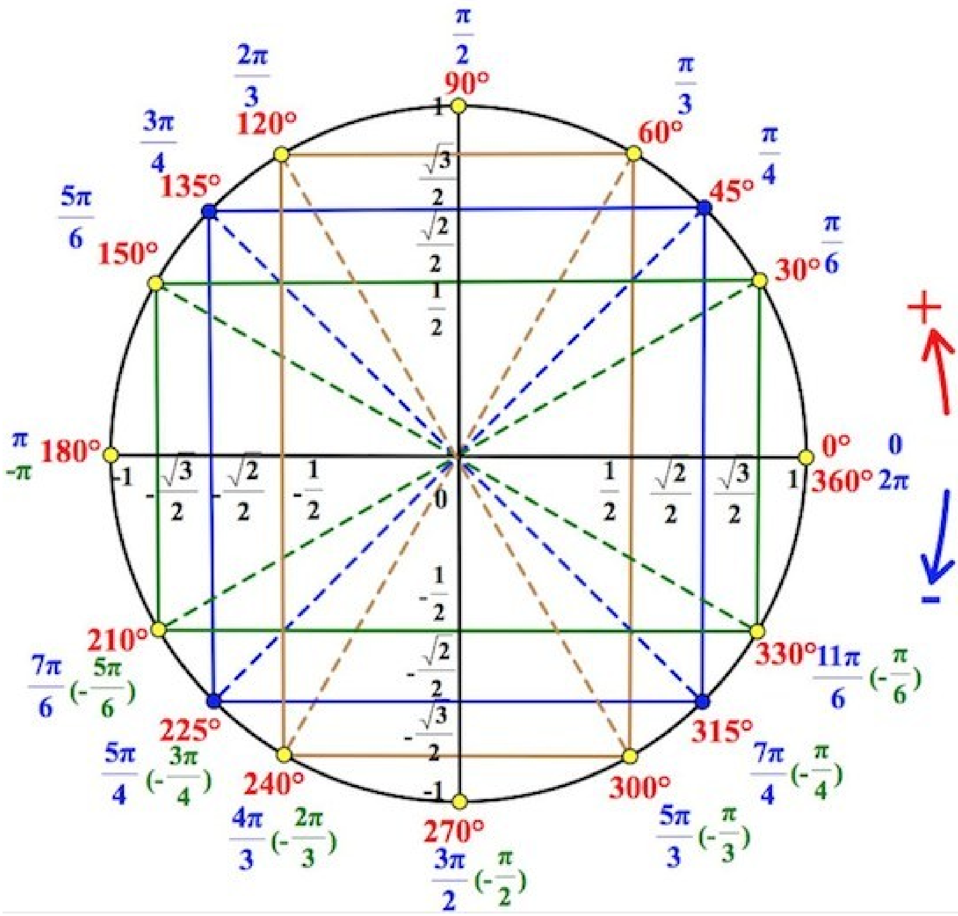
$$\cos x \, V \, a,$$

$$tgx \, V \, a,$$

$$ctgx \, V \, a,$$

где V – один из знаков ¿ , <, ≥ , ≤.

Вы должны прежде, конечно, хорошо ориентироваться в тригонометрическом круге и уметь решать простейшие тригонометрические уравнения (часть I, часть II).



Сначала мы рассмотрим **простейшие тригонометрические неравенства с синусом и косинусом**.

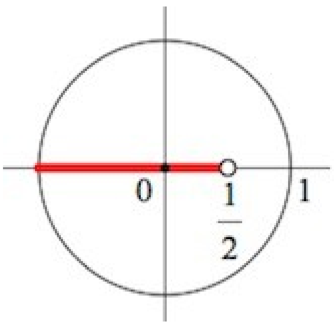
Пример 1.

Решить неравенство: $cosx < \frac{1}{2}$

Решение:

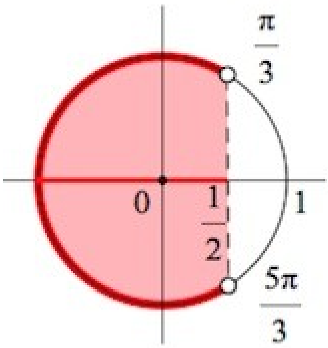
Отмечаем на оси косинусов $\frac{1}{2}$

Из задания мы видим значения $cosx$, меньшие $\frac{1}{2}$ – **левее** точки $\frac{1}{2}$ на оси косинусов.



Отмечаем все точки (дугу, точнее – серию дуг) тригонометрического круга, косинус которых будет меньше $\frac{1}{2}$

$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$



Точка $\frac{5\pi}{3}$ получается из вычисления. Так весь обход это $360^0=2\pi$, то $2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{6\pi-\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ Полученную дугу мы **проходим против часовой стрелки** (!), то есть от точки $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$.

Обратите внимание, многие, назвав первую точку $\frac{\pi}{3}$ вместо второй точки $\frac{5\pi}{3}$ указывают точку $\frac{-\pi}{3}$, что неверно!

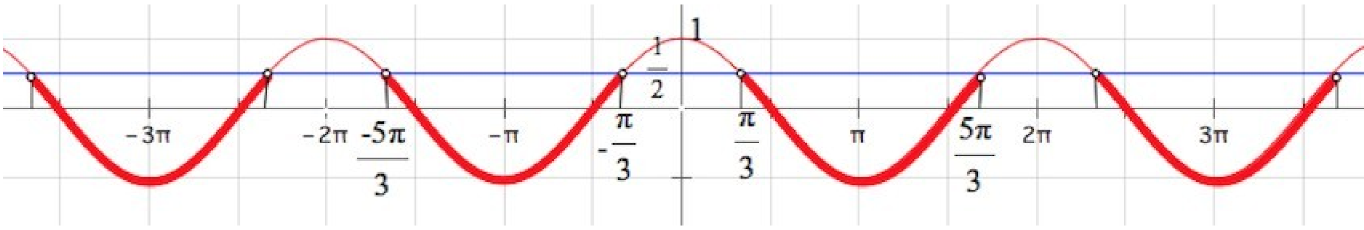
Становится видно, что неравенству удовлетворяют следующие значения x

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$$

Следите за тем, чтобы «правая/вторая точка» была бы больше «левой/первой».

Не забываем «накидывать» счетчик $2\pi n, n\in Z$

Вот так выглядит графическое решение неравенства не на тригонометрическом круге, а в прямоугольной системе координат:



Пример 2.

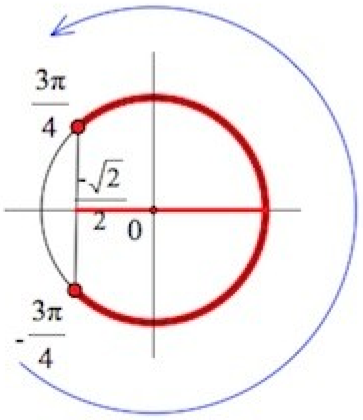
Решить неравенство: $\cos x\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Решение:

Отмечаем на оси косинусов $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Из задания имеем значения *cos x*, большие или равные $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ – **правее** точки $\frac{-\sqrt{2}}{2}$, включая саму точку.

Тогда выделенные красной дугой аргументы *x* отвечают тому условию, что $cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\frac{-3\pi}{4}+2\pi n \leq x \leq \frac{3\pi}{4}+2\pi n, n \in Z$$

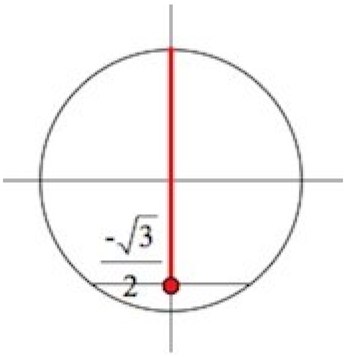
Пример 3.

Решить неравенство: $sinx$

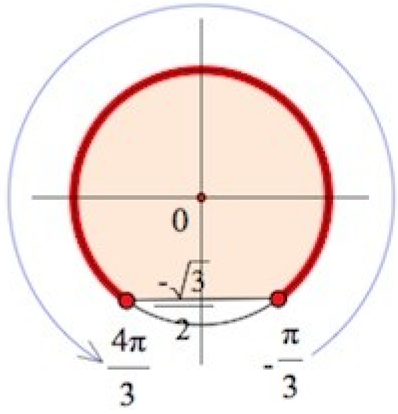
Решение:

Отмечаем на оси синусов $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

Все значения *sin x*, большие или равные $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ – **выше** точки $\frac{-\sqrt{3}}{2}$, включая саму точку.



«Транслируем» выделенные точки на тригонометрический круг:



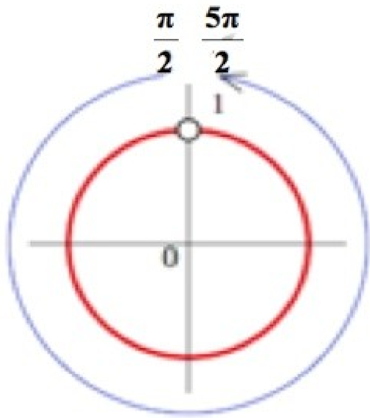
$$\frac{-\pi}{3}+2\pi n\leq x\leq\frac{4\pi}{3}$$

Пример 4.

Решить неравенство: $\sin x<1$

Решение:

Кратко:



$$\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

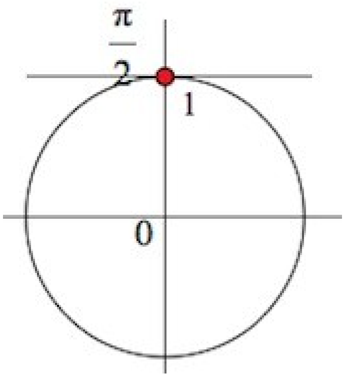
или всех x, кроме $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

Пример 5.

Решить неравенство: $\sin x\geq 1$

Решение:

Неравенство $\sin x\geq 1$ равносильно уравнению $\sin x=1$, так как область значений функции $y=\sin x$ есть $[-1;1]$



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

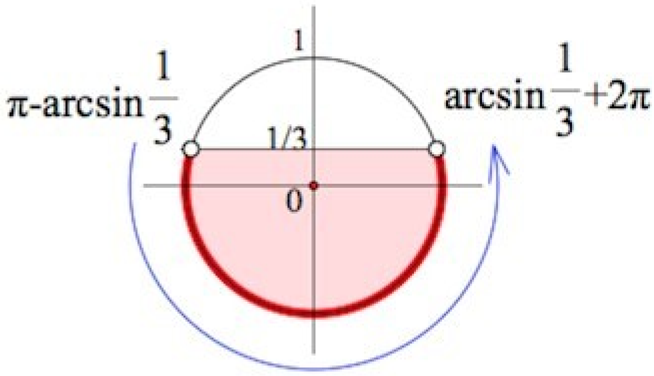
Пример 6.

Решить неравенство: $\sin x < \frac{1}{3}$

Решение:

Действия – аналогичны применяемым в примерах выше. Но дело мы имеем не с табличным значением синуса.

Здесь, конечно, нужно знать определение арксинуса.



$$\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi + 2\pi n, n \in Z$$

Тренируемся в решении простейших тригонометрических неравенств

Имейте ввиду, решения (ответы) к одному и тому же неравенству могут выглядеть по-разному, неся один и тот же смысл собою. Например, в задании 2 ответ можно было записать и так: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \le x \le \frac{11\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Перечислите основные тригонометрические формулы.

3. Перечислите формулы решения уравнений вида $\cos x = a$, $\sin x = a$, $tg\ x = a$.

Тема 1.4. Функции, их свойства и графики.

Основные понятия и термины по теме: *Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций.*

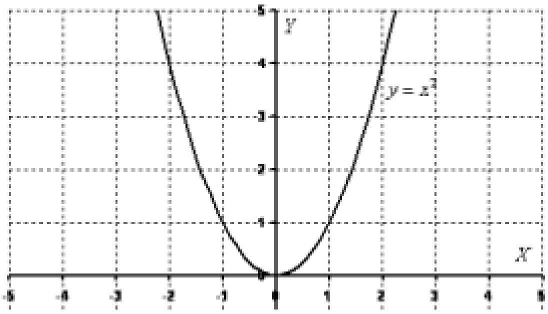
План изучения темы:

1. Функции. Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами.
2. Свойства функции: монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность.
3. Обратные функции. Область определения и область значений обратной функции. График обратной функции.

Краткое изложение теоретических вопросов:

График квадратичной, кубической функции.

Парабола. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим: $y = x^2$



Область определения – любое действительное число (любое значение «икс»). Какую бы точку на оси OX мы не выбрали – для каждого «икс» существует точка параболы. Математически это записывается так: $D(f) = \Re$. Область определения любой функции стандартно обозначается через $D(f)$ или $D(y)$. Буква $\Re$ обозначает множество действительных чисел.

Область значений – это множество всех значений, которые может принимать переменная «игрек». В данном случае: $E(f) = [0;+\infty)$ – множество всех положительных значений, включая ноль. Область значений стандартно обозначается через $E(f)$ или $E(y)$.

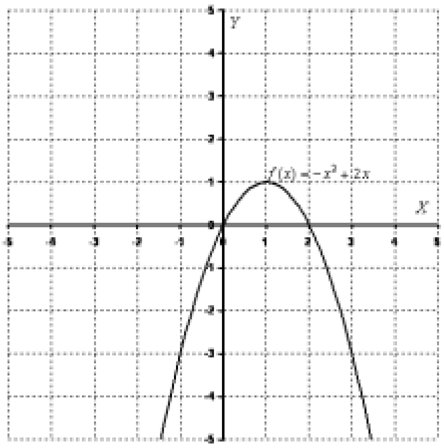
Функция $y = x^2$ является **чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси** OY. Аналитически чётность функции выражается условием $f(-x) = f(x)$. Чтобы проверить любую функцию на чётность н**ужно вместо** x **подставить в уравнение** $-x$. В случае с параболой проверка выглядит так: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, значит, функция $y = x^2$ является четной.

Функция $y = x^2$ **не ограничена сверху**.

Построить график функции $f(x) = -x^2 + 2x$.

x	1	0	2	-1	3	-2	4
y	1	0	0	-3	-3	-8	-8

Выполним чертеж:



Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее:

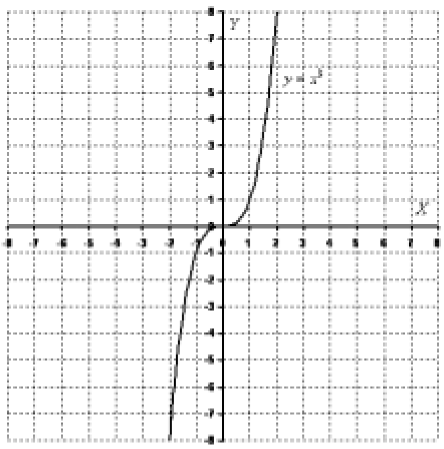
Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y = x^3$.

Перечислим основные свойства функции $y = x^3$



Область определения – любое действительное число: $D(f) = \Re$.

Область значений – любое действительное число: $E(f) = \Re$.

Функция $y = x^3$ является **нечётной. Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат**. Аналитически нечётность функции выражается условием $f(-x) = -f(x)$. Выполним проверку для кубической функции: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -(x^3) = -f(x)$, значит, функция $y = x^3$ является нечетной.

Функция $y = x^3$ **не ограничена**.

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	8	-8

График любого многочлена третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ имеет следующий вид:

В этом примере коэффициент при старшей степени $a < 0$, поэтому график развёрнут «наоборот». Принципиально такой же вид имеют графики многочленов 5-ой, 7-ой, 9-ой и других нечетных степеней.

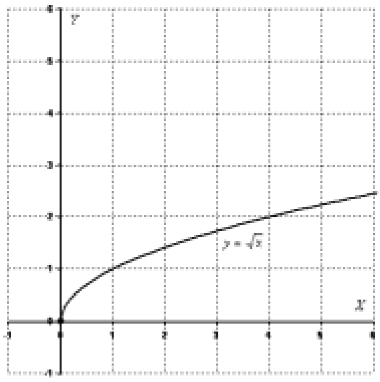


График функции $y = \sqrt{x}$

Он представляет собой одну из ветвей **параболы**.

Основные свойства функции $y = \sqrt{x}$:

Область определения: $D(f) = [0; +\infty)$.

Область значений: $E(f) = [0; +\infty)$.

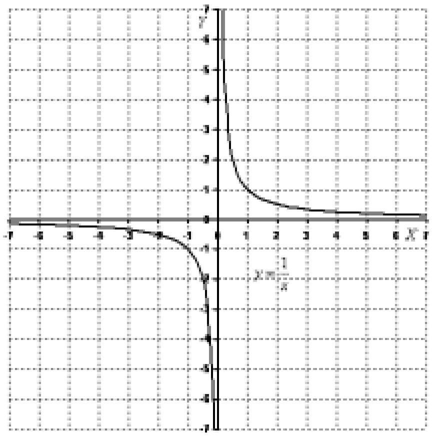
То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти.

Функция $y = \sqrt{x}$ **не ограничена сверху**.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

График гиперболы
$y=\frac{1}{x}$.

Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y=\frac{1}{x}$:

Область определения: $D(f)=\Re\setminus\{0\}$.

Область значений: $E(f)=\Re\setminus\{0\}$.

Запись $\Re\setminus\{0\}$ обозначает: «любое действительное число, исключая ноль»

В точке $x=0$ функция терпит **бесконечный разрыв**.

Такая прямая (к которой бесконечно близко приближается график какой-либо функции) называется **асимптотой**.

В данном случае ось OY является **вертикальной асимптотой** для графика гиперболы при $x\to 0$.

Таким образом, ось OX является **горизонтальной асимптотой** для графика функции $y=\frac{1}{x}$.

Функция $y=\frac{1}{x}$ является нечётной, а, значит, гипербола симметрична относительно начала координат. $f(-x)=\frac{1}{(-x)}=-\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

График функции вида $y=\frac{a}{x}$ ($a\neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.

Если $a>0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях (см. рисунок выше).

Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Обратная функция

Если поменять ролями аргумент и функцию, то x станет функцией от y. В этом случае говорят о новой функции, называемой обратной функцией. Предположим, мы имеем функцию:

$v = u^2$,

где u - аргумент, а v - функция. Если поменять их ролями, то мы получим u как функцию v :

$u = \sqrt{v}$.

Если обозначить аргумент в обеих функциях через x , а функцию – через y, то мы имеем две функции:

$y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$,

каждая из которых является обратной по отношению к другой.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Дайте определение области определения и множеству значений функции.

2.Перечислите основные свойства функций.

Тема 1.5. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

Основные понятия и термины по теме: *график функций, параллельный перенос, симметрия*

План изучения темы:

1. Определения функций, их свойства и графики.
2. Преобразования графиков. Параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия относительно прямой y = x, растяжение и сжатие вдоль осей координат.

Краткое изложение теоретических вопросов:

График показательной функции

Экспоненциальная функция $y = e^x$

e – это иррациональное число: $e \approx 2{,}718...$.

x	-1	0	1
y	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$

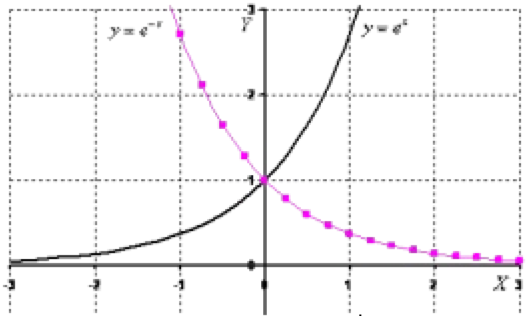


График функции $y = e^{-x}$ пока оставим в покое, о нём позже.

Основные свойства функции $y = e^x$:

Область определения: $D(f) = \Re$

Область значений: $E(f) = (0;+\infty)$. Экспонента – функция положительная, то есть для любого «икс» справедливо неравенство $y = e^x > 0$, а сам график экспоненты полностью расположен в верхней полуплоскости.

Ось OX является горизонтальной асимптотой для графика функции $y = e^{-x}$,

Такой же вид имеет любая показательная функция $y = a^x$, если $a > 1$. Функции $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$ будут отличаться только крутизной наклона графика, причем, чем больше основание, тем круче будет график.

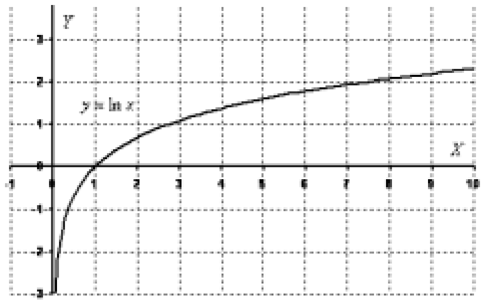
Во всех случаях графики проходят через точку $(0;1)$, то есть $a^0 = 1$.

График логарифмической функции

Рассмотрим функцию с натуральным логарифмом $y = \ln x$.

Выполним поточечный чертеж:

x	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$	$e^2 \approx 7{,}39$
y	-1	0	1	2



Основные свойства функции $y = \ln x$:

Область определения: $D(f) = (0;+\infty)$

Область значений: $E(f) = \Re$.

Функция не ограничена сверху: пусть и медленно, но ветка логарифма уходит вверх на бесконечность. Таким образом, ось OY является вертикальной асимптотой для графика функции $y = \ln x$ при «икс» стремящемся к нулю справа.

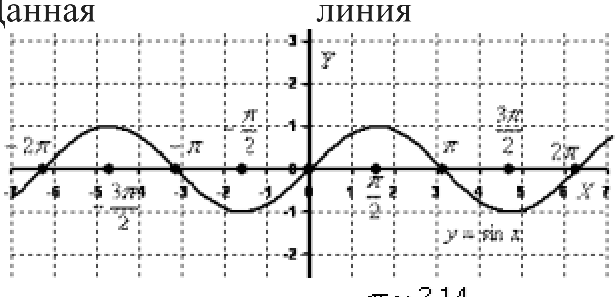
$\log_a 1 = 0$.

Экспоненциальная функция $y = e^x$ и логарифмическая функция $y = \ln x$ – это две взаимно обратные функции.

Графики тригонометрических функций

Построим график функции $y = \sin x$

Данная линия называется синусоидой.



иррациональное число: $\pi \approx 3{,}14$

Основные свойства функции $y = \sin x$:

Данная функция является периодической с периодом 2π. Посмотрим на отрезок $[0;2\pi]$. Слева и справа от него бесконечно повторяется .

Область определения: $D(f) = \Re$, то есть для любого значения «икс» существует значение синуса.

Область значений: $E(f) = [-1;1]$. Функция $y = \sin x$ является ограниченной: $-1 \le \sin x \le 1$, то есть, все у $[-1;1]$.

Синус – это функция нечетная, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: $\sin(-x) = -\sin x$. Таким образом, если в вычислениях встретится, например, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то минус терять здесь ни в коем случае нельзя. Он выносится: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2}$

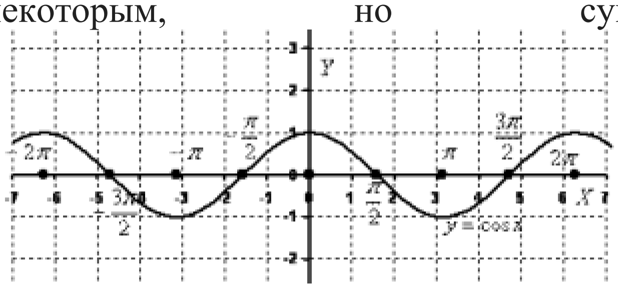
В практических вычислениях следующие значения синуса: $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\pi = 0$.

График косинуса

Построим график функции $y = \cos x$

График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ влево

Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. За некоторым, но существенным исключением.



Косинус – это функция четная, ее график симметричен относительно оси OY, и справедлив следующий факт: $\cos(-x) = \cos x$.

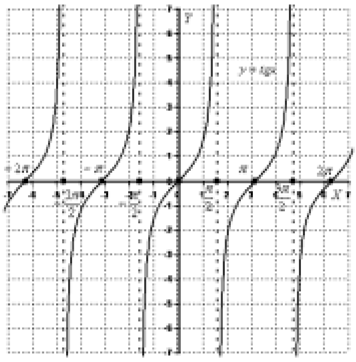
Для решения практических задач нужно знать и помнить следующие значения косинуса: $\cos 0 = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$.

Графики тангенса и котангенса

Построим график функции $y = tgx$

Основные свойства функции $y = tgx$:

Данная функция является периодической с периодом π. То есть, достаточно рассмотреть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.



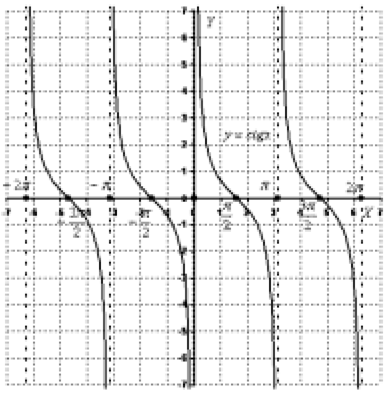
Область определения: $D(f) = \Re \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \right\}$ – все действительные числа, кроме … $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$… и т. д. или коротко: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, где k – любое целое число. Множество целых чисел (… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в математике обозначают буквой Z.

Область значений: $E(f) = \Re$. Функция $y = tgx$ не ограничена.

Тангенс – функция нечетная, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса не теряется, а выносится: $tg(-x) = -tgx$.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения тангенса: $tg0 = 0$, $tg\pi = 0$, $tg\frac{\pi}{4} = 1$, а также те точки, в которых тангенса не существует.

График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением $ctgx = \frac{1}{tgx}$.

Его график: 

2.. Симметрия относительно осей координат.

Функции y = f(x) и y = -f(x) имеют одну и ту же область определения. Их графики симметричны относительно оси Ох (рис. 1), так как точки (x; f(x)) и (x; -f(x)) симметричны относительно оси Ох. Поэтому график функции y = -f(x) получается из графика функции y = f(x) симметричным отражением последнего относительно оси Ох.

Построим этим способом графики функций $y = -x^2$ (рис. 2) и $y = -\log_2 x$ (рис. 3).

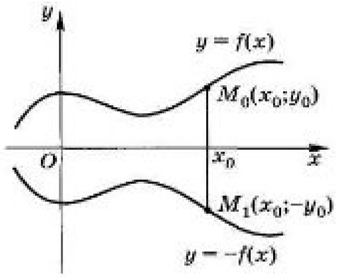


Рис. 1

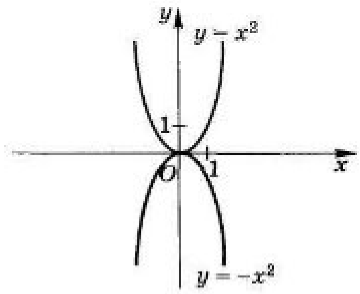


Рис. 2

Функции y = f(x) и y = f(-x) имеют области определения, симметричные относительно точки О. Графики этих функций симметричны относительно оси Оу (рис. 4), поэтому график функции y = f(-x) получается из графика функции y = f(x) симметричным отражением последнего относительно оси Оу.

Постоим этим способом графики функций $y = 2^{-x}$ (рис. 5) и $y = \log_2(-x)$ (рис. 6).

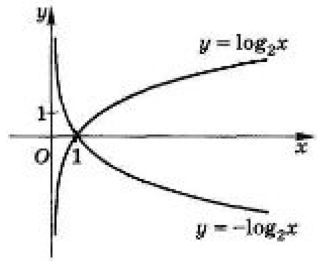


Рис. 3

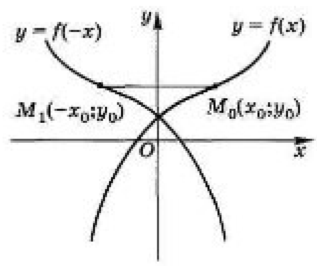
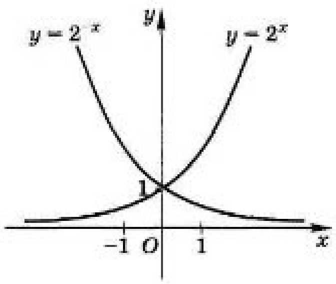


Рис. 4



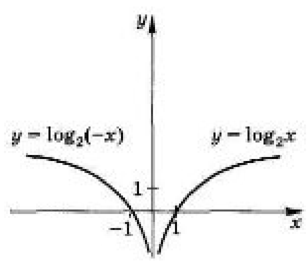


Рис. 5 Рис. 6

Сдвиг вдоль осей координат (параллельный перенос).

Функция y = f(x-a), где a $\neq$ 0, определена для всех x, таких, что (x-a) принадлежит области определения функции y = f(x), график функции y = f(x-a) получается сдвигом вдоль оси Ox на величину |a| графика функции y = f(x) вправо, если a > 0, и влево, если a < 0.

Построим этим способом графики функций $y = (x-2)^2$ (рис. 7), $y = \log_2(x+3)$ (рис. 8) и $y = \cos(x+\frac{\pi}{3})$ (рис. 9).

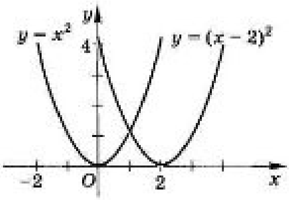


Рис. 7

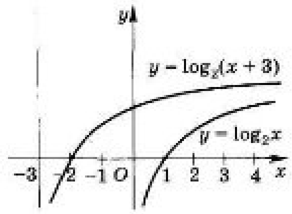


Рис. 8

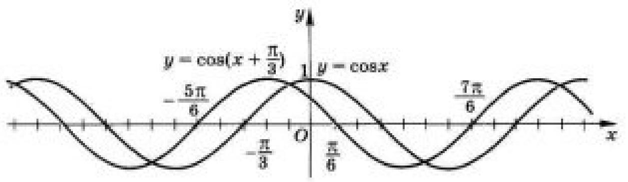
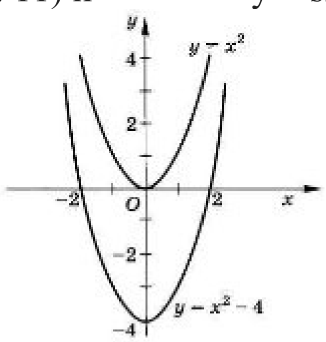


Рис. 9

Функции y = f(x)+B, где B $\neq$ 0, и y = f(x) имеют одну и ту же область определения. График функции y = f(x)+B получается сдвигом графика функции y = f(x) вдоль оси Oy на величину |B| вверх, если B > 0, и вниз, если B < 0.

Построим этим способом графики функций $y = x^2-4$ (рис. 10), $y = \log_2 x-3$ (рис. 11) и y = sinx+2 (рис. 12).



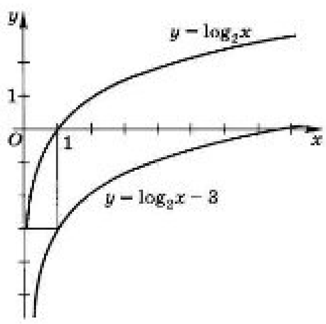


Рис. 10 Рис. 11

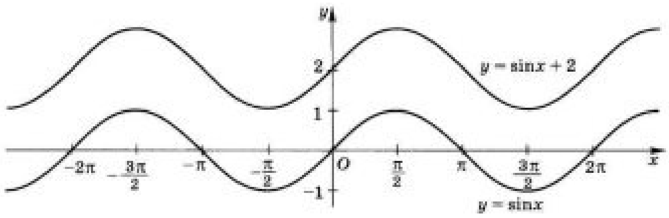


Рис. 12

Растяжение и сжатие графика вдоль осей координат.

Функции y = f(x) и y = Bf(x), где B > 0, имеют одну и ту же область определения. График функции y = Bf(x) получается растяжением в B раз, если B > 1, и сжатием в $\frac{1}{B}$ раз, если 0 < B < 1, вдоль оси Оy графика функции y = f(x).

Если B < 0, то B = -|B|, и построение графика функции y = Bf(x) разбивается на два этапа: 1) построение графика функции y = |B|f(x) по графику функции y = f(x); 2) построение графика функции y = -|B|f(x) по графику функции y = |B|f(x).

Построим этим способом графики функций y = -2x² (рис. 13), y = 2sinx (рис. 14) и y = $\frac{1}{2}$ cosx (рис. 13).

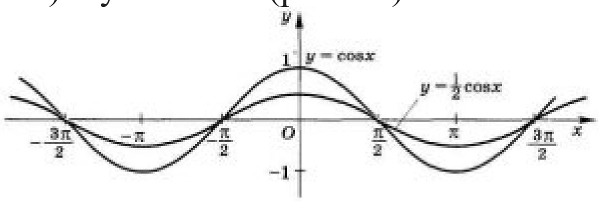


Рис. 13

Функция y = f(kx), где k > 0, определена для всех x, таких, что число kx принадлежит области определения функции y = f(x). График функции y = f(kx) получается сжатием в k раз к оси Оy, если k > 1, и растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Оy, если 0 < k < 1, графика функции y = f(x).

Если k < 0, то k = -|k|, и построение графика функции y = f(kx) разбивается на два этапа: 1) построение графика функции y = f(|k|x) по графику функции y = f(x); 2) построение графика функции y = f(-|k|x) по графику функции y = f(|k|x).

Построим этим способом графики функций y = cos($\frac{1}{2}$x) (рис. 14)иу = $\log_2(-\frac{1}{3}x)$ (рис. 15).

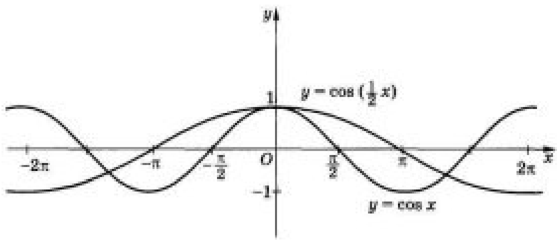


Рис. 14

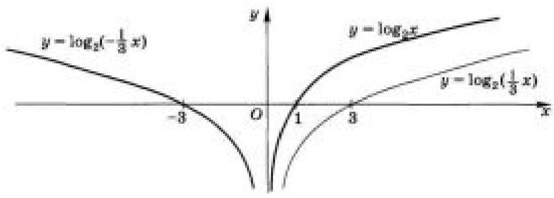


Рис. 15

4. Построение графика функции y = Af(k(x-a))+B по графику функции y = f(x).

График функции y = Af(k(x-a))+B строится по графику функции y = f(x) последовательным применением рассмотренных выше преобразований графиков. Например, так:

y = f(x) → y = f(kx) → y = Af(kx) → y = Af(k(x-a)) → y = Af(k(x-a))+B.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Перечислите свойства функций.
2. Назовите основные способы преобразования графиков функции.

Раздел 2. Начала математического анализа

Тема 2.1. Производная.

Основные понятия и термины по теме: *предел последовательности, производная.*

План изучения темы:

1. Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.
2. Производная. Понятие о производной функции, её геометрический и физический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций.

Краткое изложение теоретических вопросов:

1. Предел последовательности.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой, т. е. все её элементы, начиная с некоторого, по модулю меньше любого заранее взятого положительного числа.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\; \forall n \geqslant N \;\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

В случае, если у числовой последовательности существует предел в виде вещественного числа a, её называют *сходящейся* к этому числу. В противном случае, последовательность называют *расходящейся.* Если к тому же она неограниченна, то её предел полагают равным бесконечности.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \;\Leftrightarrow\; \forall E > 0\; \exists N(E) \in \mathbb{N}:\; \forall n \geqslant N \Rightarrow |x_n| > E$$

Кроме того, если все элементы неограниченной последовательности, начиная с некоторого номера, имеют положительный знак, то говорят, что предел такой последовательности равен *плюс бесконечности.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall E > 0\; \exists N(E) \in \mathbb{N}:\; \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n > E$$

Если же элементы неограниченной последовательности, начиная с некоторого номера, имеют отрицательный знак, то говорят, что предел такой последовательности равен *минус бесконечности*.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall E > 0\; \exists N(E) \in \mathbb{N}\colon\; \forall n \geqslant N \Rightarrow x_n < -E$$

Верхний предел последовательности — это наибольшая из её предельных точек.

Нижний предел последовательности — это наименьшая из её предельных точек.

Обозначения

Тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a обозначается одним из следующих способов:

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

или

- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Свойства

Существуют определённые особенности для предела последовательностей вещественных чисел.

Можно дать альтернативные определения предела последовательности. Например, называть пределом число, в любой окрестности которого содержится бесконечно много элементов последовательности, в то время, как вне таких окрестностей содержится лишь конечное число элементов. Таким образом, пределом последовательности может быть только предельная точка множества её элементов. Это определение согласуется с общим определением предела для топологических пространств.

Это определение обладает неустранимым недостатком: оно объясняет, что такое предел, но не даёт ни способа его вычисления, ни информации о его существовании. Всё это выводится из доказываемых ниже свойств предела.

Свойства

Арифметические свойства

взятия предела числовой последовательности является линейным, т. е. проявляет два свойства линейных отображений.

- Предел суммы числовых последовательностей есть сумма их пределов, если каждый из них существует.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

- Однородность. Константу можно выносить из-под знака предела.

$$\forall k \in \mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty} kx_n = k \lim_{n\to\infty} x_n$$

- Предел произведения числовых последовательностей факторизуется на произведение пределов, если каждый из них существует.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

- Предел отношения числовых последовательностей есть отношение их пределов, если эти пределы существуют и последовательность-делитель не является бесконечно малой.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

Примеры

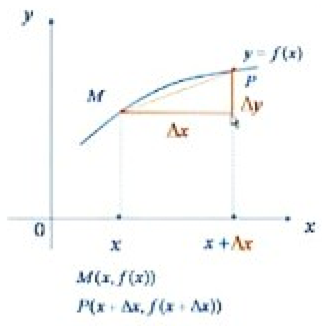
- $\lim\limits_{n\to\infty} 0,\underbrace{33\cdots 3}_{n} = 1/3$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$
- $\forall q \in \mathbb{R}\colon \lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\colon \lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n} = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = x$

- $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n > 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$
- $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$

2. Производная. Применение производной к исследованию функции.

Определение производной

Пусть задана функция f(x) на интервале (a,b). Зафиксируем точку x внутри (a,b) и придадим x приращение Δx, MP секущая, приращение



функции Δy = f(x+Δx)-f(x). Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

это тангенс угла наклона секущей MP, он является функцией Δx.

Определение. Производной называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента , когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Существует несколько способов обозначения производной, самые важные это $f'(x)$ и y'

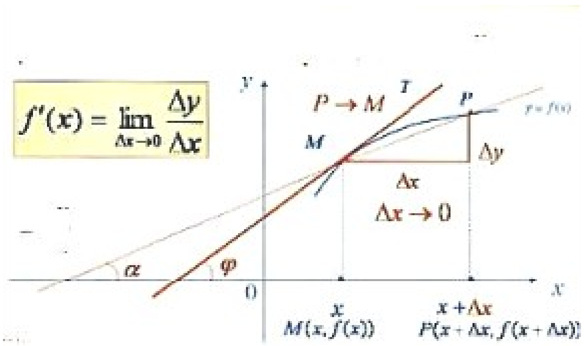
Пример нахождения $f'(x)$, используя определение:

$$f(x) = x^2, \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2$$

;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x; \quad \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (2x + \Delta x) = 2x; \quad f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$$

Геометрический смысл производной



По определению $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, устремим точку М к точке Р, это эквивалентно стремлению $\Delta x \to 0$.

Предельное положение секущей МР это касательная к кривой в точке М, ее угловой коэффициент равен $k = tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Следовательно, производная в точке х равна тангенсу угла наклона касательной в этой точке.

Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0),\ y_0 = f(x_0)$, т.к.

$k = f'(x)$, то уравнение касательной примет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Найдем уравнение нормали, перпендикулярной данной касательной и проходящей через точку x_0. Из условия перпендикулярности прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$ угловой коэффициент нормали равен $-\frac{1}{f'(x_0)}$, а уравнение нормали в точке x_0 примет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Механический смысл производной

Пусть прямолинейное движение материальной точки задано законом S = S(t). Путь, который проследует точка за время Δt равен $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$. Средняя скорость есть $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, мгновенная скорость $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$.

Пример. Пусть дан закон движения материальной точки $S(t) = t^2$, найти скорость точки через t = 3 сек.

$$v = S'(t) = (t^2)' = 2t,\ v(3) = 2 \cdot 3 = 6\frac{м}{сек}.$$

Формулы дифференцирования

$C' = 0$	$x' = 1$
$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(Cu)' = Cu'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Таблица производных

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(e^x)' = e^x$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	

Производная сложной функции

Если y = f(x) и u = u(x), то есть y=f[u(x)] сложная функция, где функции f(u) и u(x) имеют производные, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

это правило дифференцирования сложной функции.

Пример.

$$\left(e^{\sin x}\right)' = \left(e^u\right)' = \left(e^u\right)'_u \cdot u'_x = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x$$

Производная обратной функции

Пусть задана функция y = f(x), тогда определена обратная функция x = ϕ(y). Для функции y = 5x обратная функция $x = \dfrac{y}{5}$, для функции $y = x^3$ обратная функция $x = \sqrt[3]{y}$. Пусть функция y = f(x) возрастает или

убывает на (a,b) и непрерывна, тогда существует обратная функция x = ϕ(y) и ее производная

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad или \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Примеры. Найти производную обратной тригонометрической функции y = arcsinx. Обратная функция x = siny и $x'_y = \cos y$, по формуле для обратной функции $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдем $f'(x)$ функции y = arctgx. Обратная функция x = tgy, $x'_y = \frac{1}{\cos^2 x}$; $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

Логарифмическое дифференцирование

Пусть имеется функция $y = u(x)^{v(x)}$ найдем ее производную. Сначала прологарифмируем данное выражение, получим lny = v(x)lnu(x). Теперь продифференцируем $\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}$; $y' = y\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right] =$

$= u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$.

Пример. Найти $f'(x)$ функции $y = x^x$.

Логарифмируем данную функцию lny = xlnx, теперь дифференцируем $\frac{y'}{y} = \ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$; $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1.Дайте определение термину«предел последовательности».

2.Перечислите правила вычисления производных.

Тема 2.2. Первообразная и интеграл.

Основные понятия и термины по теме*: первообразная, криволинейная трапеция, интеграл.*

План изучения темы:

1. Первообразная и интеграл. Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции. Формула Ньютона—Лейбница.

Краткое изложение теоретических вопросов:

1.Первообразная. Формула Ньютона – Лейбница.

Первообразная. Функция F(x) называется первообразной для функции f (x) на промежутке X, если для любого x из X выполняется равенство *F'(x)=f(x)*

Если F(x)-первообразная для функции f(x) на промежутке X, то у функции f(x) бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид F (x)+C, где C - произвольная постоянная (основное свойство первообразной).

2.Таблица первообразных. Учитывая, что отыскание первообразной есть операция, обратная дифференцированию, и отталкиваясь от таблицы производных, получаем следующую таблицу первообразных (для простоты в таблице приведена одна первообразная F(x), а не общий вид первообразных F(x) + C:

Первообразная и неопределённый интеграл

Теория:

Во многих заданиях по математическому анализу и в случаях его практического применения появляется задача, противоположная нахождению производной: по данной функции f(x) найти такую функцию F(x), производная которой была бы равна функции f(x).

Такая функция F(x) называется **первообразной** для функции f(x).

Понятие неопределённого интеграла

Если функция F(x) **— первообразная для функции** f(x)**, то множество функций** F(x)+C **(где** C **— произвольная постоянная) называется неопределённым интегралом от функции** f(x)**, обозначается символом** ∫f(x)dx **и пишется:** ∫f(x)dx=F(x)+C**.**

Пример:

1. (x2+x)'=2x+1*, поэтому* ∫(2x+1)dx=x2+x+C.

2. (sinx)'=cosx*, поэтому* $\int$cosxdx=sinx+C*.*

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
$f(x)=k$ $f(x)=x^r$ $(r\neq-1)$ $f(x)=\frac{1}{x}$ $f(x)=e^x$ $f(x)=a^x$	$F(x)=kx$ $F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$ $F(x)=\ln\lvert x\rvert$ $F(x)=e^x$ $F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$	$f(x)=\mathrm{Sin}\ x$ $f(x)=\mathrm{Cos}\ x$ $f(x)=\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 x}$ $f(x)=\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 x}$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$F(x)=-\mathrm{Cos}\ x$ $F(x)=\mathrm{Sin}\ x$ $F(x)=-\mathrm{Ctg}\ x$ $F(x)=\mathrm{Tg}\ x$ $F(x)=\mathrm{Arcsin}\ x$ $F(x)=\mathrm{Arctg}\ x$

Правила вычисления первообразных:

1. Если F(x)-первообразная для f(x), а H(x)-первообразная для h(x), то F(x)+H(x)- первообразная для f(x)+h(x). Иными словами, первообразная суммы равна сумме первообразных.

2. Если F(x) - первообразная для f(x) и k - постоянная, то kF(x) - первообразная для kf(x). Иными словами, постоянный множитель можно вынести за знак первообразной.

3. Если F(x) - первообразная для f(x) и k, b- постоянные, причем k≠0, то F(kx+b) - первообразная для f (kx+b).

Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и F(x) - одна из первообразных функции на этом отрезке, тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Формулу Ньютона-Лейбница называют основной формулой интегрального исчисления.

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Приращение функции принято обозначать как $(F(x))\big|_a^b=F(b)-F(a)$. Пользуясь этим обозначением, формула Ньютона-Лейбница примет вид $\int_a^b f(x)dx=(F(x))\big|_a^b=F(b)-F(a)$.

Для применения формулы Ньютона-Лейбница нам достаточно знать одну из первообразных y=F(x) подынтегральной функции y=f(x) на отрезке [a; b] и вычислить приращение этой первообразной на этом отрезке.

Пример. Вычислить значение определенного интеграла $\int_1^3 x^2 dx$ по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение.

Для начала отметим, что подынтегральная функция $y = x^2$ непрерывна на отрезке [1;3], следовательно, интегрируема на нем. (Об интегрируемых функциях мы говорили в разделе функции, для которых существует определенный интеграл).

Из таблицы неопределенных интегралов видно, что для функции $y = x^2$ множество первообразных для всех действительных значений аргумента (следовательно, и для $x \in [1;3]$) записывается как $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Возьмем первообразную при C = 0: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

Теперь осталось воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла: $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Раскройте понятие «первообразная», «интеграл»
2. Назовите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла:

Тема 2.3. Уравнения и неравенства.

Основные понятия и термины по теме*: уравнения, неравенства, метод подстановки, метод сложения.*

План изучения темы:

1. Равносильность уравнений, неравенств, систем.
2. Рациональные, иррациональные, показательные и тригонометрические уравнения и системы. Основные приемы их решения.
3. Рациональные, иррациональные, показательные и тригонометрические неравенства. Основные приемы их решения. .

Краткое изложение теоретических вопросов:

1.Из свойств показательной функции знаем, что ее область значений ограничена положительными вещественными числами. Тогда если b = 0, уравнение не имеет решений. Такая же ситуация имеет место быть, в уравнении где b

Теперь положим, что b>0. Если в показательной функции основание a больше единицы, то функция будет возрастающей на всей области определения. Если в показательной функции для основания a выполнено следующее условие 0<a

Исходя из этого и применяя теорему о корне, получим, что уравнение $a^x = b$ иметь один единственный корень, при b>0 и положительном a не равном единице. Чтобы его найти, необходимо представить b в виде $b = a^c$. Тогда очевидно, что c будет являться решением уравнения $a^x = a^c$.

Рассмотрим следующий пример: решить уравнение $5^{(x2 - 2*x - 1)} = 25$.

Представим 25 как 5^2, получим:

$5^{(x2 - 2*x - 1)} = 5^2$.

Или что равносильно :

$x^2 - 2*x - 1 = 2$.

Решаем полученное квадратное уравнение любым из известных способов. Получаем два корня x = 3 и x = -1.

Ответ: 3;-1.

Решим уравнение $4^x – 5*2^x + 4 = 0$. Сделаем замену: $t=2^x$ и получим следующее квадратное уравнение:

$t^2 - 5*t + 4 = 0$.

Решаем это уравнение любым из известных способов. Получаем корни t1 = 1 t2 = 4

Теперь решаем уравнения $2^x = 1$ и $2^x = 4$.

Ответ: 0;2.

Решение показательных неравенств

Решение простейших показательных неравенств основывается тоже на свойствах возрастания и убывания функции. Если в показательной функции основание а больше единицы, то функция будет возрастающей на всей области определения. Если в показательной функции для основания а выполнено следующее условие 0<a<1, то данная функция будет убывающей на всем множестве вещественных чисел.

Рассмотрим пример: решить неравенство $(0.5)^{(7 - 3*x)} < 4$.

Заметим, что $4 = (0.5)^2$. Тогда неравенство примет вид (0.5)(7 - 3*x) < $(0.5)^{(-2)}$. Основание показательной функции 0.5 меньше единицы, следовательно, она убывает. В этом случае надо поменять знак неравенства и не записывать только показатели.

Получим: 7 - 3*x>-2.

Отсюда: x<3.

Ответ: x<3.

Если бы в неравенстве основание было больше единицы, то при избавлении от основания, знак неравенства менять было бы не нужно.

2. Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Логарифмическое уравнение.

Определение: Логарифмическое уравнение – это уравнение вида

$\log_a b(x) = \log_a c(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Уравнения, сводящиеся к этому виду, также называются логарифмическими уравнениями.

Правило:

Логарифмическое уравнение $\log_a b(x) = \log_a c(x)$ равносильно уравнению $b(x) = c(x)$, если $b(x) > 0$ и $c(x) > 0$.

Важно знать:

1) Если в уравнении разные основания, то логарифмы убирать нельзя. В левой и правой частях уравнения должны быть одинаковые основания. Возьмем для примера уравнение:

$\log_5 (3x - 8) = \log_5 (x + 2)$.

Здесь слева и справа одинаковое основание 5. Значит, можно убрать значки логарифмов и привести уравнение к более простому и понятному виду:

$3x - 8 = x + 2$.

Если основания неодинаковы, необходимо преобразовать одно из выражений так, чтобы основания стали одинаковыми – и только после этого уравнение можно потенцировать.

2) Даже если основания слева и справа одинаковые, но в уравнении есть коэффициент, то в этом случае тоже убирать логарифмы нельзя. К примеру, нельзя потенцировать уравнение такого типа:

$3\log_2 b = \log_2 25b$.

Мешает коэффициент 3 в левой части. Поэтому уравнение надо преобразовать так, чтобы коэффициент исчез. В нашем уравнении, применив одно из свойств логарифмов $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, мы можем преобразовать выражение слева:

$3\log_2 b = \log_2 b^3$.

Тогда наше уравнение обретает другой вид:

$\log_2 b^3 = \log_2 25b$.

Теперь мы имеем одинаковые основания (число 2), и уравнение без коэффициентов. Значит, уже легко можем убрать значки логарифмов:

$b^3 = 25b$.

И такое уравнение решать намного проще:

$b^3 : b = 25$

$b^{3-1} = 25$

$b^2 = 25$

$b = \sqrt{25} = 5$

Даже при одинаковых основаниях и отсутствии коэффициентов нельзя потенцировать уравнение, если в какой-то из его частей больше одного логарифма. Например, нельзя убирать логарифмы в уравнении

$\log_2 x + \log_2 (x + 1) = \log_2 (x + 9)$.

В левой части два логарифма. Надо сначала преобразовать ее. Для этого воспользуемся еще одним правилом: сумма логарифмов равна логарифму произведения. Итак, преобразовываем левую часть уравнения:

$\log_2 x + \log_2 (x + 1) = \log_2 x (x + 1) = \log_2 x^2 + x.$

У нас получилось выражение с одним логарифмом. А наше уравнение принимает новый вид:

$\log_2 x^2 + x = \log_2 (x + 9).$

И мы уже можем убрать значки логарифмов:

$x^2 + x = x + 9$

Решаем это простое уравнение:

$x^2 + x – x = 9$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = 3.$

<u>Пример</u>.

Решим уравнение

$\log_3 (x^2 – 3x – 5) = \log_3 (7 – 2x).$

<u>Решение</u>.

1) Поскольку основания в левой и правой частях одинаковые (равны 3), то мы можем освободиться от знаков логарифмов и прийти к уравнению вида $b(x) = c(x)$:

$x^2 – 3x – 5 = 7 – 2x$

2) Приравниваем уравнение к нулю и получаем квадратное уравнение:

$x^2 – 3x – 5 – 7 + 2x = 0$

$x^2 – x – 12 = 0$

Решив квадратное уравнение, находим его корни:

$x_1 = 4, x_2 = –3.$

3) Проверим, при каком из двух значений x уравнение имеет смысл.

Мы уже знаем, что логарифмическое уравнение равносильно уравнению $b(x) = c(x)$ только в том случае, если $b(x) > 0$ и $c(x) > 0$. Следовательно, выводим два неравенства:

$x^2 – 3x – 5 > 0,$

$7 – 2x > 0.$

При $x = 4$ неравенства неверны. Значит, 4 не является решением уравнения.

При $x = -3$ неравенства верны. Значит, 3 является единственным решением уравнения.

Логарифмическое неравенство.

Определение: Логарифмическое неравенство – это неравенство вида

$\log_a b(x) > \log_a c(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Неравенства, сводящиеся к этому виду, также называются логарифмическими неравенствами.

Правило: Если $b(x) > 0$ и $c(x) > 0$, то:

- при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a b(x) > \log_a c(x)$ равносильно неравенству $b(x) > c(x)$;

- при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a b(x) > \log_a c(x)$ равносильно неравенству с противоположным смыслом $b(x) < c(x)$.

Общие приемы решения систем уравнений

Система линейных уравнений называется определённой, если она имеет единственное решение.

Несовместной называется линейная система, не имеющая решения. Неопределенной называется линейная система имеющая бесконечное множество решений.

Существуют различные приёмы решения систем уравнений.

Метод подстановки заключается в следующем:

1. Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором у выражено через x (или x через у);
2. Полученное выражение подставляют вместо у (или вместо x) во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной;
3. Находят корни этого уравнения;
4. Воспользовавшись выражением у через x (или x через у), находят соответствующие значения x (или у).

Метод сложения основан на следующих теоремах:

1. Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение

системы заменить уравнением, ему равносильным, то полученная система будет равносильна заданной;

2. Пусть дана система двух уравнений с двумя переменными. Если одно уравнение системы оставить без изменения, а другое уравнение заменить суммой или разностью обоих уравнений системы, то полученная система будет равносильна заданной.

Метод введения новых переменных применяется при решении систем двух уравнений с двумя переменными одним из следующих способов:

1. Вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы;
2. Вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

Для того чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя переменными, нужно в одной системе координат построить графики уравнений и найти координаты точек пересечения этих графиков.

Методы умножения и деления при решении систем уравнений основаны на следующем утверждении: если обе части уравнения $f_2(x;y) = g_2(x;y)$ ни при каких значениях $(x;y)$ одновременно не обращаются в нуль, то системы

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y) \\ f_2(x;y) = g_2(x;y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x;y) = g_1(x;y) \\ \dfrac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)} = \dfrac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)} \end{cases}$$

равносильны.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Перечислите алгоритм решения логарифмического уравнения.

2.Назовите методы решения систем уравнений.

Раздел 3. Комбинаторика, статистика и теория вероятностей.

Тема 3.1. Элементы комбинаторики.

Основные понятия и термины по теме: *Формула бинома Ньютона. Треугольник Паскаля*

План изучения темы:

1. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений.

2. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Краткое изложение теоретических вопросов:

Комбинаторика– раздел математики, в котором исследуется, сколько всевозможных комбинаций (вариантов), подчиненных тем или иным условиям их образования, можно составить из элементов данного множества.

Для того, чтобы узнать количество комбинаций, обладающих определенными свойствами, можно сначала перечислить их и затем пересчитать. В большинстве случаев такой способ определения комбинаций занимает много времени, поэтому в комбинаторике, которая обслуживает теорию вероятностей, рассматривают несколько видов комбинаций: перестановки, размещения и сочетания. Эти виды комбинаций можно пересчитать по специальным формулам или с помощью основных правил комбинаторики, т.е. без непосредственного перечисления вариантов.

Правило суммы. Если элемент первого типа можно выбрать k1 способами, элемент второго типа – k2 способами, …, элемент s-ого типа – ks способами, то один элемент можно выбрать k1 + k2 + … + ks способами.

Правило произведения. Если элемент первого типа можно выбрать k1 способами, элемент второго типа – k2 способами, …, элемент s-ого типа – ks способами, то выбрать по одному элементу каждого типа можно k1 × k2 × … × ks способами.

Пример 1. В мешке 6 груш, 4 яблока, 3 киви и 7 мандаринов. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

Решение. По правилу суммы: 6 + 4 + 3 + 7 = 20 способами.

Пример 2. На каникулы школьник получил задание: выучить доказательство любой из шести теорем, прочитать один из семи романов, написать сочинение по одной из четырех тем. Сколькими способами можно выполнить задание?

Решение. По правилу произведения: 6 × 7 × 4 = 168 способами.

Определение 1. Размещениями без повторений называют упорядоченные k-элементные подмножества n-элементного множества, содержащие различные элементы. Их количество обозначают символом A_n^k (буква A от французского слова arrangement – размещение).

Определение 2. Размещениями с повторениями называют всевозможные упорядоченные k-элементные подмножества n-элементного множества. Их количество обозначают символом $\overline{A}_n^k$.

Теорема 1.Число размещений без повторений (с повторениями) вычисляется по формуле $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \qquad \left(\overline{A}_n^k = n^k\right).$

A_6^4

$\overline{A}_7^4 = 7^4 = 2401$

$$P_n = n! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \quad \left(P(k_1,\ldots,k_n) = \frac{(k_1+\ldots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\right).$$

$$P(1,1,1,1,2,3) = \frac{(1+1+1+1+2+3)!}{1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!} = 30240.$$

C_n^k

$\overline{C}_n^k$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \left(\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k\right).$$

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$$

$$\overline{C}_5^{20} = C_{24}^{20} = \frac{24!}{20!(24-20)!} = 10626$$

$$C_4^3(6+7+8)+C_6^3(4+7+8)+C_7^3(4+6+8)+C_8^3(4+6+7) \quad C_4^4+C_6^4+C_7^4+C_8^4$$

2.Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Бином Ньютона.

Формула бинома Ньютона для натуральных n имеет вид $\boxed{(a+b)^n = C_n^0\cdot a^n + C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b + C_n^2\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1} + C_n^n\cdot b^n}$,

где $C_n^k = \dfrac{(n)!}{(k)!\cdot(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{(k)!}$ - биномиальные коэффициенты, представляющие из себя сочетания из n по k, k=0,1,2,…,n, а "!" – это знак факториала).

К примеру, известная формула сокращенного умножения "квадрат суммы" вида $(a+b)^2 = C_2^0 \cdot a^2 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b + C_2^2 \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ есть частный случай бинома Ньютона при n=2.

Выражение, которое находится в правой части формулы бинома Ньютона, называют разложением выражения (a+b)n, а выражение $C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ называют (k+1)-ым членом разложения, k=0,1,2,…,n.

Коэффициенты бинома Ньютона, свойства биномиальных коэффициентов, треугольник Паскаля.

Треугольник Паскаля.

Биномиальные коэффициенты для различных n удобно представлять в виде таблицы, которая называется арифметический треугольник Паскаля. В общем виде треугольник Паскаля имеет следующий вид:

показатель степени	биномиальные коэффициенты										
0						C_0^0					
1					C_1^0		C_1^1				
2				C_2^0		C_2^1		C_2^2			
3			C_3^0		C_3^1		C_3^2		C_3^3		
⋮		…	…	…	…	…	…	…	…	…	
n	C_n^0		C_n^1	…	…	…	…	…	C_n^{n-1}		C_n^n

Треугольник Паскаля чаще встречается в виде значений коэффициентов бинома Ньютона для натуральных n:

показатель степени	биномиальные коэффициенты														
0								1							
1							1		1						
2						1		2		1					
3					1		3		3		1				
4				1		4		6		4		1			
5			1		5		10		10		5		1		
⋮		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
n	C_n^0		C_n^1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	C_n^{n-1}		C_n^n

Боковые стороны треугольника Паскаля состоят из единиц. Внутри треугольника Паскаля стоят числа, получающиеся сложением двух соответствующих чисел над ним. Например, значение десять (выделено красным) получено как сумма четверки и шестерки (выделены голубым). Это правило справедливо для всех внутренних чисел, составляющих треугольник Паскаля, и объясняется свойствами коэффициентов бинома Ньютона.

Свойства биномиальных коэффициентов.

Для коэффициентов бинома Ньютона справедливы следующие свойства:

коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой $C_n^p = C_n^{n-p}$, p=0,1,2,…,n;

$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$;

сумма биномиальных коэффициентов равна числу 2, возведенному в степень, равную показателю степени бинома Ньютона: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Правило сложения.

Если первое действие можно выполнить n различными способами, а второе — m способами, то выполнить первое ИЛИ второе действие можно n+m способами.

Правило умножения.

Если первое действие можно выполнить n различными способами, а второе — m способами, то выполнить первое И второе действие (в таком порядке) можно $n \cdot m$ способами.

Эти правила можно обобщить на случай 3-х, 4-х и более действий.

Пример 4.9.

Рекламный плакат мебельной фабрики утверждает, что возможно составить 100000 различных вариантов расстановки производимых ей шкафов если купить хотя бы 5 шкафов. Верно ли это, если выпускается всего 10 различных типов шкафов?

Решение.

Вычислим, сколькими способами можно расставить 5 шкафов рядом друг с другом. Первую позицию можно заполнить 10-ю различными способами (принцип сложения), вторую — также 10-ю (никто не мешает купить и второй шкаф той же модели, что и первый), третью — опять 10-ю и т.д. Вообще имеем (принцип умножения) 10·10·10·10·10=100000 различных вариантов расстановки пяти шкафов рядом друг с другом. Если же купить шкафов больше, чем 5, то, очевидно, вариантов расстановки будет еще больше. Вывод: реклама является добросовестной.

Пример 4.10.

Из тщательно перемешанной колоды в 52 карты вытягивают 3 карты. Сколько существует различных вариантов карт на руках у игрока?

Решение.

В данном опыте производится 3 действия: вытягивание 1-й карты, 2-й карты и 3-й карты.

Вычислим, сколькими способами можно вытянуть 1-ую карту. Так как всего в колоде 52 карты, то имеем 52 различных способа. (Здесь мы применили принцип сложения: карта может быть двойка пик ИЛИ тройка пик ИЛИ … ИЛИ туз червей. Значит, всего имеем 1+1+…+1=52 способа.)

Вычислим, сколькими способами можно вытянуть 2-ую карту. Так как в колоде осталось 51 карта, то, значит, второе действие можно выполнить 51-м способом.

Аналогично рассуждая, находим, что 3-е действие можно осуществить 50-ю способами.

Всего различных вариантов расположения карт на руках у игрока будет 52·51·50= 132600 способов. Для ответа осталось разделить это число на 3·2·1 – это кол-во способов перетасовать эти 3 розданные карты.

Ответ:

22100.

Число сочетаний, размещений и перестановок

Если стоит задача вычислить сколькими способами можно расположить “в ряд”(т.е. важен порядок их следования) вытянутые m предметов из коробки содержащей различных n предметов, то имеем так называемую ситуацию” перестановок”. Вычислим это количество: первую позицию можно заполнить n способами, вторую – n – 1 способом, третью – n – 2 способом, и т.д. Искомое количество способов заполнить все n позиций равно (по принципу умножения)

n(n – 1)(n – 2) (n – 3)... (n – m + 1)

и обозначается Anm.

Если стоит задача вычислить сколькими способами можно расположить “в ряд”(т.е. важен порядок их следования) вытянутые m предметов из коробки содержащей различных n предметов, то имеем так называемую ситуацию" перестановок". Вычислим это количество: первую позицию можно заполнить n способами, вторую – n – 1 способом, третью – n – 2 способом, и т.д. Искомое количество способов равно (по принципу умножения) Anm = n(n – 1)(n – 2) (n – 3)... (n – m + 1). Но, поскольку нам не важно какой именно элемент стоит на каком месте, то необходимо Anm разделить на количество способов по разному переставлять уже выбранные элементы. А это количество равно Ann= n(n – 1)(n – 2) (n – 3)... 3 2 1 = n! (читается n факториал). Искомое количество способов заполнить все n позиций равно Anm / n! и обозначается Cnm.

Пример 4.11.

В совбезе ООН 11 членов: 5 постоянных и 6 так называемые "малые нации". Для принятия решении, надо, чтобы было 7 голосов "ЗА", причем следующим образом: все постоянные+как минимум 2 временных. Сколько всего вариантов голосования? Сколько всего можно организовать выигрышных коалиций? (Выигрышной коалицией называется такая, когда как бы не голосовали противники решение все равно будет принято.)

Решение.

Так, как голосуют 11 делегаций и у них есть 2 выбора ("за","против"), то по принципу умножения имеем 2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 = 211 = 2048– вариантов голосования. Так как все постоянные члены должны проголосовать "за", то выигрышная коалиция определяется только временными членами , а кол-во – количеством способов выбрать2 или 3 или 4 или 5 или 6 временных членов, голосующих "за".

Имеем $1\cdot\left(C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6\right)=15+20+15+6+1=57$ способов, причем 15 – число так называемых минимальных выигрышных коаличий.

4.4.4. Схема Бернулли

Пусть производится n одинаковых независимых опытов. В каждом испытании некоторое событие А может произойти с вероятностью p (а, значит, не произойти с вероятностью $q=1-p$).

Вычислим вероятность того, что событие произойдет ровно k раз в проведенных n опытах.

$P_n(0) = \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n} = q^n$ – вероятность того, что во всех опытах событие не произойдет (см. также пример 4.7)

$P_n(1) = \underbrace{p \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n} + \underbrace{q \cdot p \cdot \ldots \cdot q}_{n} + \ldots + \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot p}_{n} = n \cdot p \cdot q^{n-1}$ – вероятность того, что событие произойдет ровно в одном опыте.

$P_n(2) = \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}$ – вероятность того, что событие произойдет ровно 2 раза в n опытах.

…………………………

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ – вероятность того, что событие произойдет РОВНО k раз в n попытках.

…………………………

$P_n(n) = \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n} = p^n$ – вероятность того, что событие произойдет во всех опытах.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Назовите формулы числа перестановок, сочетаний, размещений.
2. Назовите формулу бинома Ньютона для натуральных n.

Тема 3.2. Элементы теории вероятностей.

Основные понятия и термины по теме: *событие, вероятность события.*

План изучения темы:

1. Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей. Понятие о независимости событий. Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Понятие о законе больших чисел. Универсальный характер законов логики математических рассуждений. Вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

Краткое изложение теоретических вопросов:

Под испытанием (опытом) в теории вероятностей принято понимать наблюдение какого-либо явления при соблюдении определенного комплекса условий, который должен каждый раз строго выполняться при повторении данного испытания. Если то же самое явление наблюдается при другом комплексе условий, то это уже другое испытание.

Когда речь идет о соблюдении комплекса условий данного испытания, имеется в виду постоянство значений всех факторов, контролируемых в данном испытании. Но при этом, как правило, имеет место большое число неконтролируемых факторов, которые трудно или невозможно учесть.

Результаты испытаний можно охарактеризовать качественно и количественно.

Качественная характеристика заключается в регистрации какого-либо явления, которое может наблюдаться или не наблюдаться при данном испытании. Любое из этих явлений называется в теории вероятностей событием.

События делятся на:

невозможные (в результате опыта никогда не произойдут),	достоверные (в результате опыта происходят всегда),	случайные (в результате опыта событие может произойти или не произойти).

Теория вероятностей рассматривает именно случайные события. При этом предполагается, что испытание может быть повторено неограниченное (по крайней мере, теоретически) число раз. Например, выполнение штрафного броска в баскетболе есть испытание, а попадание в кольцо — событие.

Другим примером события, часто приводимым в учебниках по теории вероятностей, является выпадение определенного числа очков (от 1 до 6) при бросании игральной кости.

События в теории вероятностей принято обозначать начальными прописными латинскими буквами A, B, C, ...

Случайные события называются несовместными если появление одного исключает появление другого. В противном случае они называются совместными.

Если в результате опыта произойдет хоть одно из некой группы событий, то они образуют полную группу. Появление хотя бы одного события из полной группы – достоверное событие.

Если, по условиям испытания нет никаких оснований предполагать, что один из исходов появляется чаще других, то все исходы являются равновозможными.

Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятности другого.

Количественная характеристика испытания состоит в определении значений некоторых величин, которыми интересуются при данном испытании (например, число подтягиваний на перекладине или время на беговой дистанции). В силу действия большого числа неконтролируемых факторов эти величины могут принимать различные значения в результате испытания. Причем до испытания невозможно предсказать значение величины, поэтому она называется случайной величиной.

4.2.2. **Вероятность событий**

Вероятность какого либо события – численное выражение возможности его наступления.

В некоторых простейших случаях вероятности событий могут быть легко определены непосредственно исходя из условий испытаний.

Представим себе общую схему таких испытаний.

Пусть испытание имеет n возможных несовместных исходов, т. е. отдельных событий, могущих появиться в результате данного испытания;

причем при каждом повторении испытания возможен один и только один из этих исходов. Кроме того, пусть по условиям испытания, нет никаких оснований предполагать, что один из исходов появляется чаще других, т. е. все исходы являются равновозможными.

Допустим теперь, что при n равновозможных несовместных исходах интерес представляет некоторое событие A, появляющееся при каждом из m исходов и не появляющееся при остальных n–т исходах. Тогда принято говорить, что в данном испытании имеется п случаев, из которых т благоприятствуют появлению события A.

Вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу всех равновозможных несовместных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) представляет собой так называемое классическое определение вероятности по Лапласу, пришедшее из области азартных игр, где теория вероятностей применялась для определения перспективы выигрыша.

Статистическое определение вероятности.

Будем фиксировать число испытаний, в результате которых появилось некоторое событие A. Пусть было проведено N испытаний, в результате которых событие A появилось ровно nN раз. Тогда число nN называется частотой события, а отношение $\frac{n_N}{N}$ — частостью (относительной частотой) события.

Замечательным экспериментальным фактом является то, что частость события при большом числе повторений испытания начинает мало изменяться и стабилизируется около некоторого определенного значения, в то время как при малом числе повторений она принимает различные, совершенно случайные значения. Поэтому интуитивно ясно, что если при неограниченном повторении испытания частость события будет стремиться к вполне определенному числовому значению, то это значение можно принять и качестве объективной характеристики события A. Такое число P(A), связанное с событием A, называется вероятностью события A.

Математически неограниченное число повторений испытания записывается в виде предела (lim) при N, стремящемся к бесконечности (∞):

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_N}{N}.$$

Поскольку nN никогда не может превзойти N, то вероятность оказывается заключенной в интервале $0 \le P(A) \le 1$.

Следует отметить, что приведенное определение вероятности является абстрактным, оно не может быть экспериментально проверено, так как на практике нельзя реализовать бесконечно большое число повторений испытания.

Пусть проводятся независимые испытания, при каждом из которых вероятность события А неизменна. Справедливо утверждение, называемое законом больших чисел или теоремой Бернулли: если N достаточно велико, то с вероятностью сколь угодно близкой к единице, отличие $\frac{n_N}{N}$ от P(A) меньше любого наперед заданного положительного числа или, в символьной записи, $P\left(\left|\frac{n_n}{N} - P(A)\right| > \varepsilon\right) = 1$. Т.е. много раз бросая монету, мы “почти наверняка” будем получать примерно равные частоты выпадения герба и цифры.

4.3. Действия над событиями

В этом разделе приводятся основные правила операций над событиями с использованием для наглядности их графического изображения в виде диаграмм.

Вначале введем понятие “поле событий” как совокупности всех случайных событий данного испытания, для которых определены вероятности. На рис. 4.1 поле событий изображено в виде заштрихованного прямоугольника.

1. Сумма (объединение) событий (рис. 4.2) представляет собой сложное событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А и В. Объединение событий обозначается как $A \cup B$, или $A + B$.

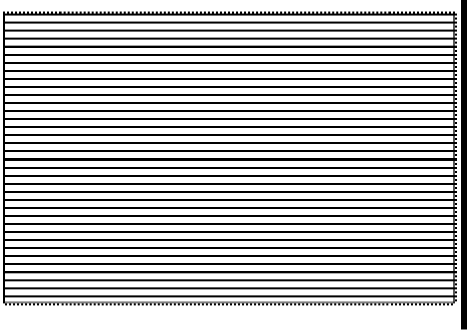
2. Произведением (пересечением) событий А и В называется их совместное появление (рис. 4.3). Обозначается произведение событий как $A \cap B$, или $A \bullet B$.

3. Достоверным событием называется событие, которое обязательно происходит в результате данного испытания (рис. 4.4). Оно обозначается обычно как Е.

4. Невозможное событие – событие, которое не может произойти в результате данного испытания. Принятое обозначение – $\varnothing$.

5. Несовместными называются события, которые в результате данного испытания не могут произойти вместе (рис. 4.5). Примеры несовместных событий: попадание и промах при выстреле, выпадение двух и трех очков при бросании игральной кости. Рис. 4.5 наглядно показывает, что для несовместных событий $A \bullet B = \varnothing$.

6. Противоположным к А событием называется событие, состоящее в непоявлении события А (рис. 4.6). Обозначается противоположное событие символом $\overline{A}$. Примеры противоположных событий: промах и попадание при выстреле, выпадение герба или цифры при одном подбрасывании монеты.



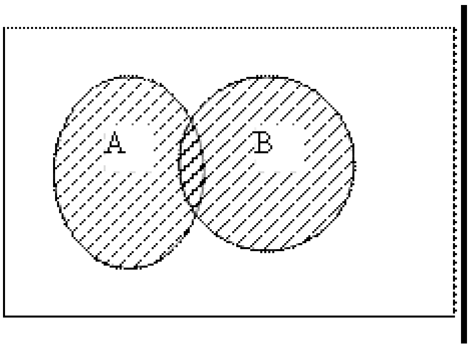
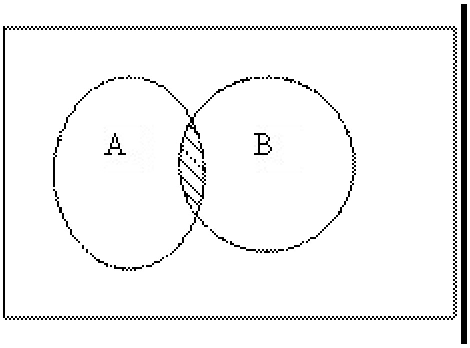


Рис. 4.1. Поле событий Рис. 4.2. Сумма событий



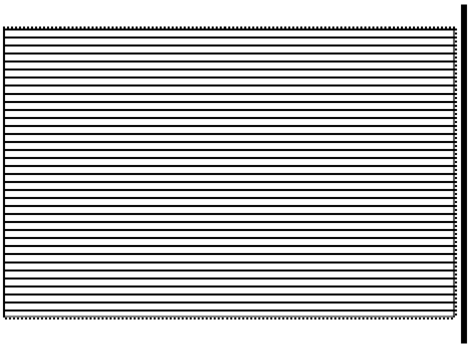
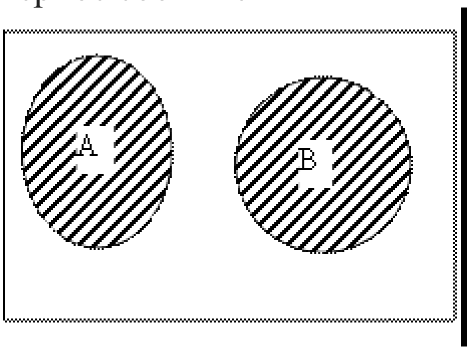


Рис. 4.3. Произведение событий Рис. 4.4. Достоверное событие



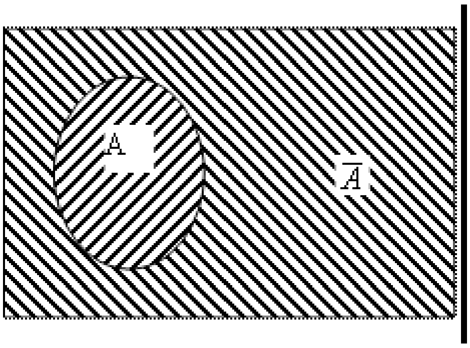


Рис. 4.5. Несовместные события Рис. 4.6. Противоположные события

Примеры непосредственного определения вероятностей

Рассмотрим несколько примеров на вычисление вероятностей по формуле (4.1).

Пример 4.1

Испытание состоит в подбрасывании игральной кости, на каждой из граней которой проставлено число очков (от 1 до 6). Какова вероятность того, что: 1) выпадает 2 очка? 2) выпадает нечетное число очков?

Решение 1: В данном испытании имеется 6 равновозможных случаев (выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков), так как нет оснований предполагать, что появление какого-то определенного числа очков более вероятно (если, конечно, кость симметрична). Поэтому вероятность выпадения любого числа очков, в том числе и 2, при одном подбрасывании равна $\frac{1}{6}$.

Событию А, заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствуют три случая (выпадение 1, 3 и 5), поэтому получаем

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

Решение 2: В данном испытании имеется 2 равновозможных исхода (выпадение четного числа очков (т.е. 2, 4, 6) и нечетного), так как кость симметрична, то очевидно, что эти исходы равновозможные.

Событию А, заключающемуся в появлении нечетного числа очков, благоприятствуют 1 случай из двух, поэтому по формуле (4.1) получаем $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Отметим, что построенную таким образом пространство элементарных событий непригодно для расчета вероятности того, что выпадает 2 очка, так как этому событию не благоприятствует не один из введенных нами элементарных исходов.

Пример 4.2

В урне 5 белых и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

Решение. В этом примере имеется 15 равновозможных (шары не отличаются по размеру) исходов опыта, причем ожидаемому событию (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому искомая вероятность составит $\frac{5}{15}$.

Основные правила вычисления вероятностей сложных событий

Ниже приведены основные правила, позволяющие определить вероятность появления сложного события на основании известных вероятностей составляющих его более простых событий.

1. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(E) = 1$$

.

2. Вероятность объединения (суммы) несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) +, \ldots, + P(A_n)$$

Эти два равенства являются аксиомами теории вероятностей, т. е. принимаются в качестве исходных, но требующих доказательства свойств вероятностей. На их основе строится вся теория вероятностей.

Все остальные, приведенные ниже без доказательств формулы могут быть выведены из принятых аксиом.

3. Вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\varnothing) = 0$$

.

4. Вероятность события, противоположного событию А, равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Формула (4.5) оказывается полезной на практике в тех случаях, когда вычисление вероятности непосредственно события А затруднительно, в то время как вероятность противоположного события находится просто (см. ниже п.9).

5. Теорема сложения вероятностей. Вероятность объединения произвольных событий равна сумме их вероятностей за вычетом вероятности произведения событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

.

Для несовместных событий $P(AB) = 0$ и формула (4.6) переходит в (4.3).

6. Условная вероятность. Если требуется найти вероятность события В при условии, что произошло некоторое другое событие А, то такую ситуацию характеризуют с помощью условной вероятности $P(B \mid A)$. Условная

вероятность равна отношению вероятности произведения событий А и В к вероятности события А:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

В тех случаях, когда события А и В несовместны, $P(AB)=\phi$ и соответственно $P(B|A)=0$.

7. Определение условной вероятности в виде (4.7) дает возможность записать следующую формулу для вычисления вероятности произведения событий (теорема умножения вероятностей)

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$$

8. Поскольку вероятность события А (или В) для независимых событий по определению не изменяется при появлении другого события, то условная вероятность $P(A|B)$ совпадает с вероятностью события А, а условная вероятность $P(B|A)$ — с Р(В). Вероятности Р(А) и Р(В) в отличие от условных вероятностей называются безусловными.

$$P(A|B)=P(A),\ P(B|A)=P(B),$$

Теорема умножения вероятностей для независимых событий записывается следующим образом:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$$

,т. е. вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

9. Вычислим вероятность появления хотя бы одного события в n испытаниях

А – появление в n испытаниях хотя бы один раз интересующего нас события.

$\overline{A}$ – интересующее нас событие не появлилось в n испытаниях ни разу.

А1 – интересующее нас событие появлилось в первом испытании.

А2 – интересующее нас событие появлилось во втором испытании.

….

An – интересующее нас событие появлилось в n-ом испытании.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n)$$

10. Формула полной вероятности.

Если событие А может произойти только при появлении одного из несовместных событий Н1, Н2, …, Hn, то

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n)$$

Пример

В урне 5 белых, 20 красных и 10 черных шаров, не отличающихся по размеру. Шары тщательно перемешивают и затем наугад вынимают 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым или черным?

Решение. Пусть событие А – появление белого или черного шара. Разобьем это событие на более простые. Пусть В1 – появление белого шара, а В2 – черного. Тогда, А=В1+В2 по определению суммы событий. Следовательно Р(А)=Р(В1+В2). Так как В1 и В2 – несовместные события, то по теореме о вероятности суммы несовместных событий (формула 4.3) Р(В1+В2) = Р(В1)+Р(В2).

Вычислим вероятности событий В1 и В2. В этом примере имеется 35 равновозможных (шары не отличаются по размеру) исходов опыта, событию В1 (появлению белого шара) благоприятствуют 5 из них, поэтому $P(B_1) = \frac{5}{35}$. Аналогично, $P(B_2) = \frac{10}{35}$. Следовательно, $P(A) = \frac{5}{35} + \frac{10}{35} = \frac{15}{30}$.

Пример 4.4

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружен хотя бы один преступник?

Решение. Пусть событие А – “обнаружен хотя бы один преступник”. Разобьем это событие на более простые. Пусть В1 – обнаружен первый преступник, а В2 – обнаружен второй преступник. Тогда, А=В1+В2 по определению суммы событий. Следовательно Р(А)=Р(В1+В2). Так как В1и В2 – совместные события, то по теореме о вероятности суммы событий (формула 4.6)

Р(В1+В2) = Р(В1)+Р(В2)-Р(В1 В2) = 0,5+0,5 – 0,25=0,75.

Можно решать и через обратное событие: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Пример 4.5 а)

Преступник имеет 3 ключа. В темноте он открывает дверь выбирая ключ случайным образом. На открытие каждой из дверей он тратит 5 сек. Найти вероятность того, что он откроет все двери за 15 сек.

Решение. Пусть событие А – “открыты все двери”. Разобьем это событие на более простые. Пусть В – “открыта 1-я“, С – “ открыта 2-я“, а D – “ открыта 3-я“. Тогда, А=ВСD по определению произведения событий. Следовательно Р(А)=Р(ВСD). По теореме о вероятности произведения независимых событий (формула 4.10) Р(ВСD) = Р(В)Р(С) Р(D).

Вычислим вероятности событий В, Си D. В этом примере имеется 3 равновозможных (каждый ключ выбираем из 3-х) исходов опыта. Каждому из событий В, Си D благоприятствует 1 из них, поэтому $P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{3}$ $P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Пример 4.5 б)

Изменим задачу: считаем, что преступник – забывчивый человек. Пусть преступник открыв дверь, оставляет ключ в ней. Какова тогда вероятность, что он откроет все двери за 15 сек?

Решение. Событие А – “открыты все двери”. Опять, А=ВСD по определению произведения событий. Следовательно Р(А)=Р(ВСD). Но, теперь события В, Си D – зависимы. По теореме о вероятности произведения зависимых событий Р(ВСD) = Р(В)Р(С|В) Р(D|ВС).

Вычислим вероятности : $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C \mid B) = \frac{1}{2}$ (ключа осталось только два и один из них подходит!), $P(D \mid BC) = \frac{1}{1}$ и, значит, $P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{6}$.

Пример 4.6

Ведутся поиски двух преступников. Каждый из них независимо от другого может быть обнаружен в течение суток с вероятностью 0,5. После поимки одно из них, в связи с увеличением количества сотрудников, занятых в поисках, вероятность найти второго возрастает до 0,7. Какова вероятность того, что в течение суток будет обнаружены оба преступника.

Решение. Пусть событие А – “обнаружены два преступника”. Разобьем это событие на более простые. Пусть В1 – обнаружен первый преступник, а В2 – обнаружен второй преступник, после того, как пойман первый. Тогда, А=В1В2 по определению произведения событий. Следовательно Р(А)=Р(В1В2). Так как В1 и В2 – зависимые события, то по теореме о вероятности произведения зависимых событий (формула 4.8) Р(В1В2) = Р(В1)Р(В2/В1) = 0,5 0,7=0,35.

Пример 4.7

Найти вероятность того, что при подбрасывании монеты 10 раз герб выпадет хотя бы 1 раз.

Решение. Пусть событие А – “герб выпадет хотя бы 1 раз”. Рассмотрим обратное событие: $\overline{A}$ – “герб не выпадет ни разу”. Очевидно, что обратное событие легче чем исходное разбить на более простые. Пусть А1 – герб не выпал при первом броске, А2 – герб не выпал при втором броске, … А10 – герб не выпал при 10-м броске. Все события А1…А10 независимы, следовательно, (формула 4.11)

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_{10})=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_{10})=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}.$$

Пример 4.8

В проведении операции по освобождению заложников участвуют 2 группы снайперов: 10 человек с винтовкой ОП21 и 20 человек с АКМ47. Вероятность поражения из ОП21 – 0,85, а АКМ47 – 0,65. Найти вероятность того, что при одном выстреле произвольного снайпера преступник будет поражен.

Решение. Пусть событие А – “преступник поражен”. Разобьем это событие на более простые. Преступник может быть поражен либо из ОП21, либо из АКМ47. Вероятность того, что произвольный снайпер вооружен ОП21 (событие Н1) равна 10/30. Вероятность того, что произвольный снайпер вооружен АКМ47 (событие Н2) равна 20/30.

Вероятность того, что преступник поражен равна (формула 4.12)

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{10}{30}\cdot 0{,}85+\frac{20}{30}\cdot 0{,}65 .$$

В подобных задачах полезно изобразить дерево всех возможных исходов (с указанием вероятностей каждого исхода):

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Дайте определение термину«вероятность события».

2. Перечислите основные правила вычисления вероятностей сложных событий.

Тема 3.3. Элементы математической статистики.

Основные понятия и термины по теме: *генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.*

План изучения темы:

1. Представление данных (таблицы, диаграммы, графики), генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана. Понятие о задачах математической статистики. Применение законов логики математических рассуждений во областях человеческой деятельности.

2. Решение практических задач с применением вероятностных методов

Краткое изложение теоретических вопросов:

Случайные величины

Случайные величины (с.в.) – численное значение появляющееся в результате опыта, и принимающее произвольное значение из заранее определенного множества.

Существует два типа случайных величин: дискретные и непрерывные.

Дискретные случайные величины принимают в результате испытания одно из изолированного дискретного множества значений. Они хорошо подходят для описания результатов измерений, связанных с подсчетом и выражаемых целыми числами.

Примеры дискретных случайных величин: оценка, полученная на экзамене, число попаданий в мишень в серии из 10 выстрелов и т. п.

Вероятность принятия дискретной случайной величиной каждого из возможных ее значений больше нуля. Эта вероятность может быть записана как

$$P(\{X = x_i\}) = P_i,$$

где i =... −1, 0, 1 ...

Здесь X — обозначение случайной величины; xi — конкретные числовые значения, принимаемые дискретной случайной величиной; pi — вероятности этих значений.

Индекс i может в общем случае пробегать значения от $-\infty$ до ∞.

Функция $P(\{X = x_i\})$, связывающая значения дискретной случайной величины с их вероятностями, называется ее распределением (законом распределения). Обычно закон распределения записывается в виде таблицы вида

X	x_1	x_2	…	x_n	…

P	p_1	p_2	…	p_n	…	

Пример 4.12. Пусть X – число очков выпавшее на игральной кости при одном броске. Тогда, эта с.в. распределена по закону

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Непрерывные случайные величины в результате испытания могут принимать любые значения из некоторого интервала.

Примеры непрерывных случайных величин: спортивный результат в беге или прыжках, рост и масса тела человека, сила мышц и др.

Поскольку число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно велико и чаще всего нет оснований предположить, что одни значения появляются существенно чаще других, то вероятность принятия непрерывной случайной величиной каждого отдельного значения оказывается равной нулю. По этой причине нельзя описать распределение непрерывной случайной величины в виде вероятностей ее отдельных значений, как в случае дискретных случайных величин. Здесь необходимы другие подходы, которые рассмотрены в разделах 4.6 и 4.7.

Случайное событие – любое событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта.

Пример: При бросании монеты может выпасть «орел» или «решка». Это два возможных варианта события или исхода испытания.

Рассмотрим следующую ситуацию.

Мы бросаем игральный кубик. Допустим, мы заинтересованы в выпадении четного числа очков на кубике. Как часто такое будет случаться?

Всего на кубике 6 граней. В результате броска выпадет либо 1, либо 2, 3, 4, 5, 6. То есть произойдет одно событие из шести равновозможных.

Все шесть событий или исходов испытания (выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6) можно подразделить на две группы: благоприятные для нас (выпадение 2, 4, 6) и неблагоприятные (выпадение 1, 3, 5).

Так вот вероятность события p равна отношению числа благоприятных исходов k к числу всевозможных исходов n, то есть

В нашем случае вероятность выпадения четного числа очков при броске игрального кубика равна

По сути это означает, что если мы делаем (пусть 30) бросков, то мы, конечно не можем утверждать, что в этом случае выпадет четное число очков ровно (или 15) раз, но число выпадения четного числа очков будет близко к (или 15), то есть условно можно сказать, что половина бросков будет отвечать нашему интересу.

Как вы уже понимаете, вероятность события не может быть больше 1.

Если вероятность события равна нулю, значит оно не случится.

Если вероятность события равна 1, то событие обязательно произойдет.

Например, вероятность вытащить из мешка с черными шарами белый шар равна нулю, а вероятность вытащить черный шар равна 1.

Событие называется противоположным событию , если не произошло событие .

Например, при стрельбе по мишени событие «промах» – противоположно событию «попадание».

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, то есть

$\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25;$

На экзамене 40 вопросов, Коля не выучил 4 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

Решение:

Вероятность события определятся формулой: где – число благоприятных событий (исходов), – число всех возможных событий.

Из 40 вопросов (число всевозможных исходов) Коля выучил вопросов (число благоприятных исходов).

Тогда вероятность того, что Коле попадется выученный вопрос – это .

Ответ: 0,9.

Задача 2.

В фирме такси в данный момент свободно 35 машин: 11 красных, 17 фиолетовых и 7 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

Решение:

Вероятность того, что к заказчице приедет зеленое такси равна

Ответ: 0,2.

Задача 3.

В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Решение:

В сумме выпадет 7 очков в следующих вариантах:

5+1+1 (3 комбинации)

1+2+4 (6 комбинаций)

1+3+3 (3 комбинации)

2+2+3 (3 комбинации)

Всего вариантов.

Каждый из трех кубиков может выпасть шестью гранями, поэтому общее число исходов равно .

Следовательно, вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков, равна

Ответ: 0,07.

Задача 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

Решение:

Благоприятный исход: орел-орел-орел-орел.

Всего исходов –

Значит, вероятность того, что решка не выпадет ни разу – есть

Ответ: 0,0625.

Задача 5.

Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 75 докладов — в первый день 27 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение:

Всего запланировано 75 докладов, и так как в первый день запланировано 27, то на оставшиеся два дня остается 75-27=48 докладов, при этом во второй и третий дни будет прочитано по 48:2=24 доклада.

Значит вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на третий день есть

Ответ: 0,32.

Совместные и несовместные события

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других. То есть, может произойти только одно определённое событие, либо другое.

Например, бросая игральную кость, можно выделить такие события, как выпадение четного числа очков и выпадение нечетного числа очков. Эти события несовместны.

События называются совместными, если наступление одного из них не исключает наступления другого.

Например, бросая игральную кость, можно выделить такие события, как выпадение нечетного числа очков и выпадение числа очков, кратных трем. Когда выпадает три, реализуются оба события.

Сумма событий

Суммой (или объединением) нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

При этом сумма двух несовместных событий есть сумма вероятностей этих событий:

Например, вероятность выпадения 5 или 6 очков на игральном кубике при одном броске, будет , потому что оба события (выпадение 5, выпадение 6) неовместны и вероятность реализации одного или второго события вычисляется следующим образом:

Вероятность же суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без учета их совместного появления:

Например, в торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдем вероятность того, что к концу дня кофе закончится хотя бы в одном из автоматов (то есть или в одном, или в другом, или в обоих сразу).

Вероятность первого события «кофе закончится в первом автомате» также как и вероятность второго события «кофе закончится во втором автомате» по условию равна 0,3. События являются совместными.

Вероятность совместной реализации первых двух событий по условию равна 0,12.

Значит, вероятность того, что к концу дня кофе закончится хотя бы в одном из автоматов есть

Зависимые и независимые события

Два случайных события А и В называются независимыми, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого. В противном случае события А и В называют зависимыми.

Например, при одновременном броске двух кубиков выпадение на одном из них, скажем 1, и на втором 5, – независимые события.

Произведение вероятностей

Произведением (или пересечением) нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Если происходят два независимых события А и В с вероятностями соответственно Р(А) и Р(В), то вероятность реализации событий А и В одновременно равна произведению вероятностей:

Например, нас интересует выпадение на игральном кубике два раза подряд шестерки. Оба события независимы и вероятность реализации каждого из них по отдельности – . Вероятность того, что произойдут оба эти события будет Задача 1.

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Внешние углы», равна 0,35. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение:

События «Достанется вопрос по теме Вписанные углы» и «Достанется вопрос по теме вписанная окружность» – **несовместные**. Значит, вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем равна сумме вероятностей этих событий: 0,35+0,2=0,55.

Ответ: 0,55.

Задача 2.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 70% этих стекол, вторая – 30%. Первая фабрика выпускает 1% бракованных стекол, а вторая – 3%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ситуация 1:

Стекло оказывается с первой фабрики (вероятность события 0,7) и (умножение) оно бракованное (вероятность события 0,01).

То есть должны произойти оба события. На языке теории вероятностей это означает **произведение вероятностей** каждого из событий:

Ситуация 2:

Стекло оказывается со второй фабрики (вероятность события 0,3) и оно бракованное (вероятность события 0,03):

Поскольку при покупке стекла мы оказываемся в ситуации 1 или (сумма) в ситуации 2, то по **формуле суммы вероятностей несовместных событий** получаем:

Ответ: 0,016.

Задача 3.

В тоговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение:

Вероятность события А: «кофе закончится в первом автомате» Р(А) равна 0,3.

Вероятность события В: «кофе закончится во втором автомате» Р(В) равна 0,3.

Вероятность события А В: «кофе закончится в обоих автоматах» Р(А В) равна 0,16.

Вероятность суммы двух совместных событий А+В, есть сумма их вероятностей без вероятности события А В:

Нас же интересует вероятность события, противоположного событию А+В. Действительно, всего возможны 4 события, три из них, помеченные желтым цветом, отвечают событию А+В:

++	−+
+−	−−

Кофе остался: +
Кофе закончился: -

Ответ: 0,56.

Задача 4.

В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,12 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

Решение:

Оба автомата неисправны с вероятностью

Хотя бы один автомат исправен (исправен+неисправен, неисправен+исправен, исправен+исправен)– это событие, противоположное событию «оба автомата неисправны», поэтому его вероятность есть.

Ответ: 0,9856.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1.Дайте определение термину «случайная величина».

2. Назовите алгоритм решения задачи, содержащей овместные и несовместные события.

Раздел 4. Геометрия.

Тема 4.1. Прямые и плоскости в пространстве.

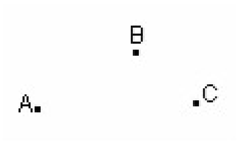
Основные понятия и термины по теме: *точка, прямая, пространство, перпендикуляр, наклонная.*

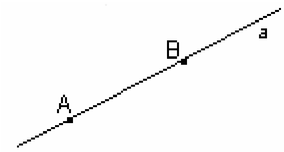
План изучения темы:

1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей. Перпендикулярность прямой и плоскости.. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол. Угол между плоскостями. Перпендикулярность двух плоскостей.

Краткое изложение теоретических вопросов:

Основные фигуры в пространстве: точки, прямые и плоскости.





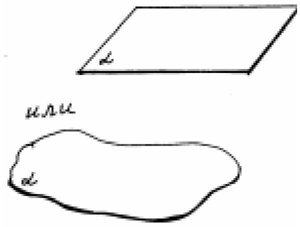


рис. 1 рис. 2 рис. 3

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

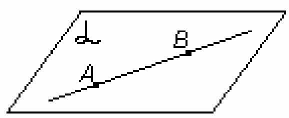
$A \in \alpha$

$B \in \alpha$ (точки A, B, C лежат в плоскости α)

$C \in \alpha$

рис. 4

А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости

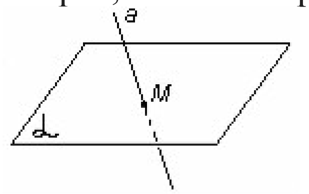


$AB \subset \alpha$

Прямая AB лежит в плоскости α

рис. 5

Замечание. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.

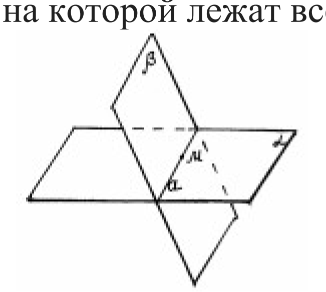


$a \cap \alpha =$ M

Прямая а и плоскость α пересекаются в точке М.

рис. 6

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$\alpha \cap \beta =$ a

α и β пересекаются по прямой а.

рис. 7

Следствие 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Взаимное расположение двух прямых и пространстве характеризуется следующими тремя возможностями.

Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек — параллельные прямые.

Прямые лежат и одной плоскости и имеют одну общую точку — прямые пересекаются.

В пространстве две прямые могут быть расположены еще так, что не лежат ни в одной плоскости. Такие прямые называются скрещивающимися (не пересекаются и не параллельны).

Теорема. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая пересекает эту плоскость и точке, которая не лежит на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости.

Признаки перпендикулярности прямой и плоскости:

1) *Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

2) Если плоскость перпендикулярна одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Наклонная к плоскости. Прямая, пересекающая плоскость и не перпендикулярная ей, называется *наклонной к плоскости.*

Теорема о трёх перпендикулярах. *Прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная проекции наклонной к этой плоскости, перпендикулярна и самой наклонной.*

Признак перпендикулярности плоскостей: *если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.*

Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. *Для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр*

Параллельность прямых, прямой и плоскости.

Признаки параллельности прямой и плоскости:

1) *Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.*

2) *Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.*

Признаки параллельности плоскостей:

1) *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

2) *Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.*

Признаки параллельности прямых в пространстве:

1) *Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.*

2) *Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.*

Расстояние от точки до плоскости.

Расстояние от точки до плоскости определяется через **расстояние от точки до точки**, одна из которых заданная точка, а другая – проекция заданной точки на заданную плоскость.

Пусть в трехмерном пространстве задана точка M1 и плоскость χ. Проведем через точку M1 прямую a, перпендикулярную к плоскости χ. Обозначим точку пересечения прямой a и плоскости χ как H1. Отрезок M1H1 называют перпендикуляром, опущенным из точки M1 на плоскость χ, а точку H1 – основанием перпендикуляра.

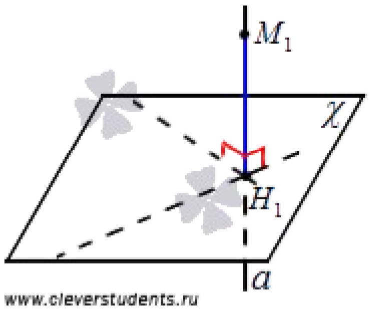
Определение.

Расстояние от точки до плоскости – это расстояние от данной точки до основания перпендикуляра, проведенного из заданной точки к заданной плоскости.

Чаще встречается определение расстояние от точки до плоскости в следующем виде.

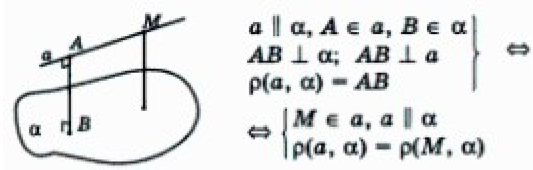
Определение.

Расстояние от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, опущенного из заданной точки к заданной плоскости.



Следует отметить, что расстояние от точки M1 до плоскости χ, определенное таким образом, является наименьшим из расстояний от заданной точки M1 до любой точки плоскости χ. Действительно, пусть точка H2 лежит в плоскости χ и отлична от точки H1. Очевидно, треугольник M2H1H2 является прямоугольным, в нем M1H1 – катет, а M1H2 – гипотенуза, следовательно, $|M_1H_1| < |M_1H_2|$. Кстати, отрезок M1H2 называется наклонной, проведенной из точки M1 к плоскости χ. Итак, перпендикуляр, опущенный из заданной точки на заданную плоскость, всегда меньше наклонной, проведенной из этой же точки к заданной плоскости.

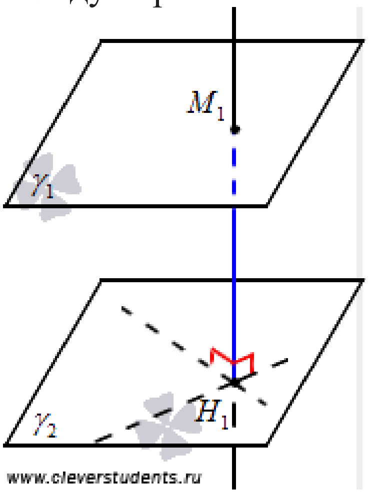
Расстояние между прямой и плоскостью

Расстояние от прямой до непараллельной ей плоскости равно нулю.	
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.	

Расстояние между двумя параллельными плоскостями – определение.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями определяется через **расстояние от точки до плоскости**. Покажем, как это делается.

Рассмотрим две параллельные плоскости γ_1и γ_2. Возьмем на любой из этих плоскостей точку M1 и опустим перпендикуляр M1H1 из этой точки на другую плоскость. Длина перпендикуляра M1H1 является расстоянием между параллельными плоскостями γ_1и γ_2.



Определение.

Расстояние между параллельными плоскостями – это расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости.

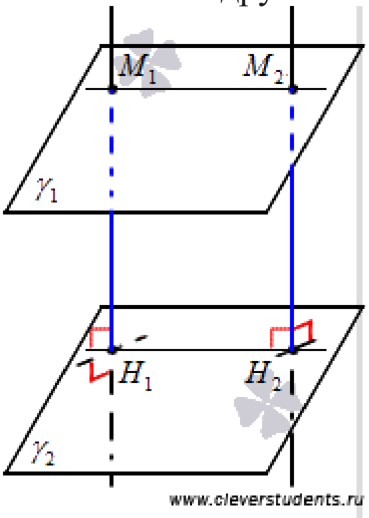
Такое определение расстояния между параллельными плоскостями не случайно. Оно тесно связано со следующей теоремой.

Теорема.

Все точки одной из параллельных плоскостей находятся на одинаковом расстоянии от другой плоскости.

Доказательство.

Пусть нам даны две параллельные плоскости γ_1 и γ_2. Чтобы доказать эту теорему нам нужно доказать, что два перпендикуляра M1H1 и M2H2, проведенные из различных точек M1 и M2 одной из заданных параллельных плоскостей к другой плоскости, имеют одинаковую длину.



Прямые M1H1 и M2H2 параллельны, так как они перпендикулярны к одной плоскости. Из аксиомы о единственной плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой, следует, что через две параллельные прямые проходит единственная плоскость (об этом мы упоминали в разделе **способы задания плоскости**). Тогда будем считать, что через параллельные прямые M1H1 и M2H2 проходит плоскость γ_3. Очевидно, плоскость γ_3 пересекает плоскости γ_1 и γ_2 по прямым M1M2 и H1H2. Эти прямые не пересекаются (в противном случае плоскости γ_1 и γ_2 имели бы общую точку, что невозможно, так как они параллельны по условию), значит, они параллельны. Таким образом, в четырехугольнике M1M2H2H1 противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, M1M2H2H1 - параллелограмм (в нашем случае прямоугольник). Следовательно, его противоположные стороны равны. То есть, $|M_1H_1| = |M_2H_2|$, что и требовалось доказать.

Следует отметить, что расстояние между параллельными плоскостями является наименьшим из расстояний между произвольными точками этих параллельных плоскостей.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1.Назовите варианты взаимного расположения прямой и плоскости.

2.Перечислите признаки параллельности прямой и плоскости.

Тема 4.2. Многогранники.

Основные понятия и термины по теме: *Вершины, ребра, грани, высота, апофема, призма, пирамида, параллелепипед, куб.*

План изучения темы:

1. Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка. Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.

2. Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед. Куб.

3. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр.

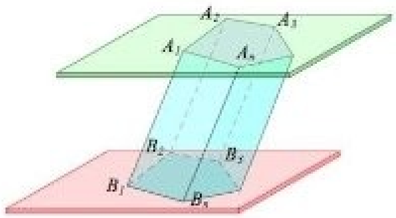
Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде. Сечения куба, призмы и пирамиды.

4. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Краткое изложение теоретических вопросов:

Призма. Виды призмы

Призмой (n-угольной призмой) называется многогранник, составленный из двух равных многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, и параллелограммов

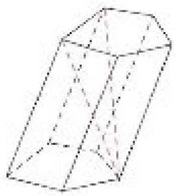


Указанные в определении равные многоугольники – основания призмы.

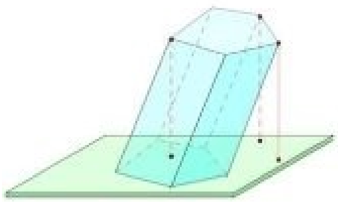
Боковые грани – все грани, кроме оснований (являются параллелограммами).

Боковые ребра – общие стороны боковых граней (параллельны между собой и равны).

Диагональ – отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

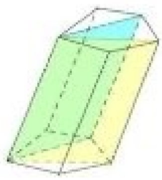


Высота призмы – перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.

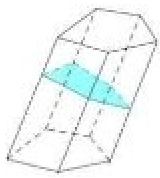


Диагональная плоскость – плоскость, проходящая через боковое ребро призмы и диагональ основания.

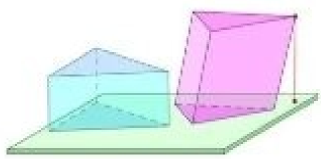
Диагональное сечение –пересечение призмы и диагональной плоскости.



Перпендикулярное сечение – пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной ее боковому ребру.

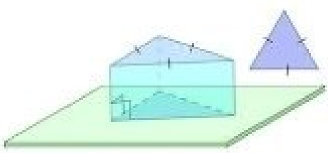


Различают призмы прямые (боковые ребра перпендикулярны плоскости основания) и наклонные (не прямые).



Среди прямых призм выделяют правильные.

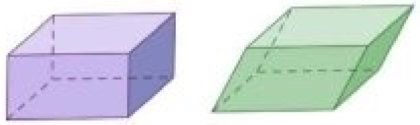
Правильная призма – это прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник (равносторонний треугольник, квадрат, правильный шестиугольник и т.п.).



Частным случаем призмы является параллелепипед.

Параллелепипед – это призма, основаниями которой являются параллелограммы.

Среди параллелепипедов выделяют наклонные, прямые и прямоугольные параллелепипеды.



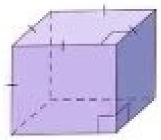
Прямой параллелепипед — это параллелепипед, у которого 4 боковые грани — прямоугольники.

Прямоугольный параллелепипед — это параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники (или прямой параллелепипед с прямоугольником в основании).

Наклонный параллелепипед — это параллелепипед, боковые грани которого не перпендикулярны основаниям.

Частный случай прямоугольного параллелепипеда – куб.

Куб – прямоугольный параллелепипед, все грани которого – квадраты.



Определение 1. Пирамида называется правильной, если её основанием является правильный многоугольник, при этом вершина такой пирамиды проецируется в центр ее основания.

Определение 2. Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а высота проходит через центр основания.

Элементы правильной пирамиды

Высота боковой грани, проведенная из ее вершины называется апофема. На рисунке обозначена как отрезок ON

Точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания, называется вершиной пирамиды (O)

Треугольники, имеющие общую сторону с основанием и одну из вершин, совпадающую с вершиной, называются боковыми гранями (AOD, DOC, COB, AOB)

Отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания называется высотой пирамиды (OK)

Диагональное сечение пирамиды - это сечение, проходящее через вершину и диагональ основания (AOC, BOD)

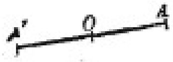
Многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды, называется основанием пирамиды (ABCD)

Если в основании правильной пирамиды лежит треугольник, четырехугольник и т.д. то она называется **правильной треугольной**, четырехугольной и т.д.

Треугольная пирамида есть четырехгранник — **тетраэдр**.

Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде. Понятие о симметрии в пространстве (центральная, осевая, зеркальная). Примеры симметрий в окружающем мире.

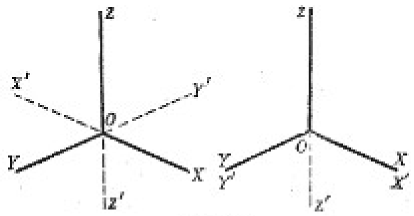
Центральная симметрия. Две фигуры называются симметричными относительно какой-либо точки O пространства, если каждой точке A одной фигуры соответствует в другой фигуре точка A', расположенная на прямой OA по другую сторону от точки O, на расстоянии, равном расстоянию точки A от точки O (черт. 114). Точка O называется центром симметрии фигур.



Черт. 114.

Пример таких симметричных фигур в пространстве мы уже встречали (§ 53), когда, продолжая за вершину рёбра и грани многогранного угла, получали многогранный угол, симметричный данному. Соответственные отрезки и углы, входящие в состав двух симметричных фигур, равны между собой. Тем не менее фигуры в целом не могут быть названы равными: их нельзя совместить одну с другой вследствие того, что порядок расположения частей в одной фигуре иной, чем в другой, как это мы видели на примере симметричных многогранных углов.

В отдельных случаях симметричные фигуры могут совмещаться, но при этом будут совпадать несоответственные их части. Например, возьмём прямой трёхгранный угол (черт. 115) с вершиной в точке O и рёбрами OX, OY, OZ.



Черт. 115.

Построим ему симметричный угол OX'Y'Z'. Угол OXYZ можно совместить с OX'Y'Z' так, чтобы ребро OX совпало с OY', а ребро OY с OX'. Если же совместить соответственные рёбра OX с OX' и OY с OY', то рёбра OZ и OZ' окажутся направленными в противоположные стороны.

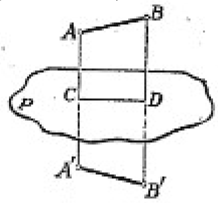
Если симметричные фигуры составляют в совокупности одно геометрическое тело, то говорят, что это геометрическое тело имеет центр симметрии. Таким образом, если данное тело имеет центр симметрии, то всякой точке, принадлежащей этому телу, соответствует симметричная точка, тоже принадлежащая данному телу. Из рассмотренных нами геометрических тел центр симметрии имеют, например: 1) параллелепипед, 2) призма, имеющая в основании правильный многоугольник с чётным числом сторон.

Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.

Симметрия относительно плоскости. Две пространственные фигуры называются симметричными относительно плоскости P, если каждой точке A в одной фигуре соответствует в другой точка A', причём отрезок AA' перпендикулярен к плоскости P и в точке пересечения с этой плоскостью делится пополам.

Теорема. Всякие два соответственных отрезка в двух симметричных фигурах равны между собой.

Пусть даны две фигуры, симметричные относительно плоскости P. Выделим две какие-нибудь точки A и B первой фигуры, пусть A' и B' — соответствующие им точки второй фигуры (черт. 116, на чертеже фигуры не изображены).



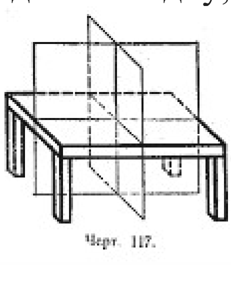
Черт. 116.

Пусть далее С— точка пересечения отрезка АА' с плоскостью Р, D — точка пересечения отрезка ВВ' с той же плоскостью. Соединив прямолинейным отрезком точки С и D, получим два четырёхугольника ABDC и A'B'DC. Так как АС = А'С, BD = B'D и / ACD = / ACD, / BDC = / B'DC, как прямые углы, то эти четырёхугольники равны (в чём легко убеждаемся наложением). Следовательно, АВ = А'В'. Из этой теоремы непосредственно вытекает, что соответствующие плоские и двугранные углы двух фигур, симметричных относительно плоскости, равны между собой. Тем не менее совместить эти две фигуры одну с другой так, чтобы совместились их соответственные части, невозможно, так как порядок расположения частей в одной фигуре обратный тому, который имеет место в другой (это будет доказано ниже, § 102). Простейшим примером двух фигур, симметричных относительно плоскости, являются: любой предмет и его отражение в плоском зеркале; всякая фигура, симметрична со своим зеркальным отражением относительно плоскости зеркала.

Если какое-либо геометрическое тело можно разбить на две части, симметричные относительно некоторой плоскости, то эта плоскость называется плоскостью симметрии данного тела.

Геометрические тела, имеющие плоскость симметрии, чрезвычайно распространены в природе и в обыденной жизни. Тело человека и животного имеет плоскость симметрии, разделяющую его на правую и левую части.

На этом примере особенно ясно видно, что симметричные фигуры нельзя совместить. Так, кисти правой и левой рук симметричны, но совместить их нельзя, что можно видеть хотя бы из того, что одна и та же перчатка не может подходить и к правой и к левой руке. Большое число предметов домашнего обихода имеет плоскость симметрии: стул, обеденный стол, книжный шкаф, диван и др. Некоторые, как например обеденный стол, имеют даже не одну, а две плоскости симметрии (черт. 117).



Черт. 117.

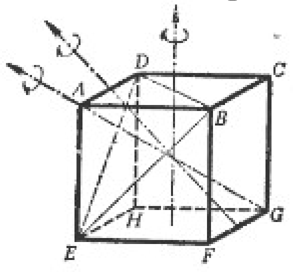
Обычно, рассматривая предмет, имеющий плоскость симметрии, мы стремимся занять по отношению к нему такое положение, чтобы плоскость симметрии нашего тела, или по крайней мере нашей головы, совпала с плоскостью симметрии самого предмета. В этом случае . симметричная форма предмета становится особенно заметной.

Симметрия относительно оси. Ось симметрии второго порядка. Две фигуры называются симметричными относительно оси l (ось—прямая линия), если каждой точке A первой фигуры соответствует точка A' второй фигуры, так что отрезок AA' перпендикулярен к оси l, пересекается с нею и в точке пересечения делится пополам. Сама ось l называется осью симметрии второго порядка.

Симметрия куба. Как и для всякого параллелепипеда, точка пересечения диагоналей куба есть центр его симметрии.

Куб имеет девять плоскостей симметрии: шесть диагональных плоскостей и три плоскости, проходящие через середины каждой четвёрки его параллельных рёбер.

Куб имеет девять осей симметрии второго порядка: шесть прямых, соединяющих середины его противоположных рёбер, и три прямые, соединяющие центры противоположных граней (черт. 120).



Черт. 120.

Эти последние прямые являются осями симметрии четвёртого порядка. Кроме того, куб имеет четыре оси симметрии третьего порядка, которые являются его диагоналями. В самом деле, диагональ куба AG (черт. 120), очевидно, одинаково наклонена к ребрам AB, AD и AE, а эти рёбра одинаково наклонены одно к другому. Если соединить точки B, D и E, то получим правильную треугольную пирамиду ADBE, для которой диагональ куба AG служит высотой. Когда при вращении вокруг высоты эта пирамида будет совмещаться сама с собой, весь куб будет совмещаться со своим исходным положением. Других осей симметрии, как нетрудно убедиться, куб не имеет. Посмотрим, сколькими различными способами куб может быть совмещён сам с собой. Вращение вокруг обыкновенной оси симметрии даёт одно положение куба, отличное от исходного, при котором куб в целом совмещается сам с собой.

Сечения куба, призмы, пирамиды.

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Способы задания плоскости:

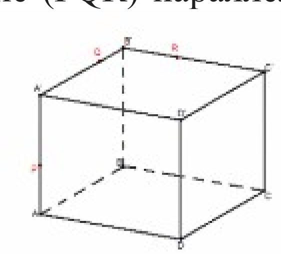
тремя точками, не лежащими на одной прямой;

прямой и точкой, не лежащей на прямой;

двумя параллельными прямыми;

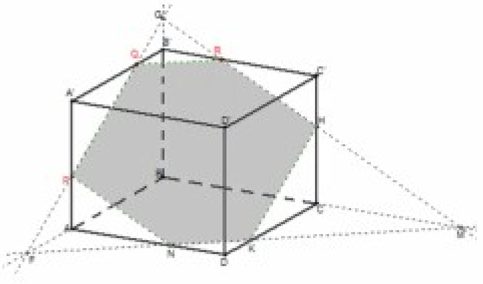
двумя пересекающимися прямыми.

Построить сечение (PQR) параллелепипеда. Все точки лежат на ребрах двух смежных граней.

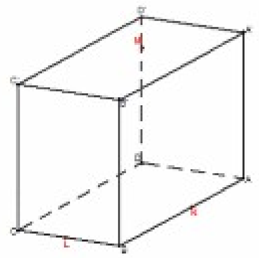


Построение:

1) Строим PQ и QR;2) PQ ∩ BA = F, PQ ∩ BB' = G;3) GR ∩ CC' = H, GR ∩ BC = M;4) FM ∩ AD = N, FM ∩ DC = K;5) PQRHKN — искомое сечение.

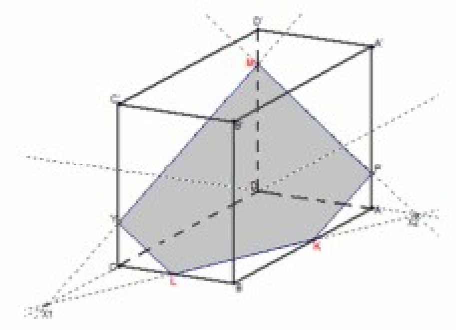


Построить сечение параллелепипеда (MLK). Точки K и L лежат на ребрах нижнего основания AB и CB соответственно, а точка M принадлежит боковому ребру DD'.

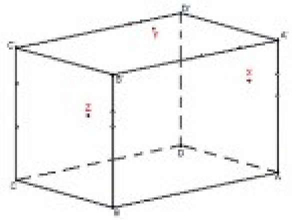


Построение:

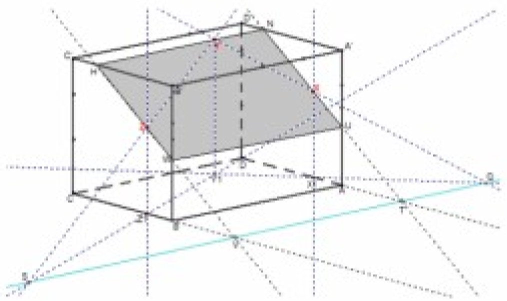
1) KL ∩ DC = X1;2) MX1 ∩ CC' = Y;3) LK ∩ AD = X2;4) MX2 ∩ AA' = P;6) LYMPK — искомое сечение.



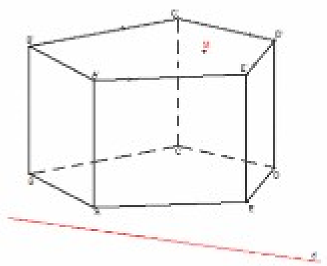
Построить сечение параллелепипеда (XYZ) методом следов, если точки

X, Y, Z лежат на трех смежных гранях.  Построение:

1) ZZ1 ∥ YY1 ∥ XX1;2) XY ∩ X1Y1 = Q;3) YZ ∩ Y1Z1 = S;4) QS — след;5) DA ∩ QS = T;6) XT ∩ AA' = U, XT ∩ A'D' = N;7) CB ∩ QS = V;8) ZV ∩ BB' = W, ZV ∩ C'B' = H;9) HNUW — искомое сечение.

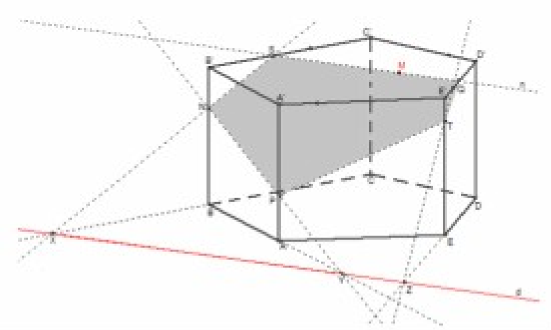


Построить сечение (M, d) призмы. Точка M принадлежит верхнему основанию, прямая d лежит в плоскости нижнего основания.



Построение:

1) Через точку M проведем прямую n ∥ d;2) n ∩ B'C' = S, n ∩ E'D' = Q;3) CB ∩ d = X, BA ∩ d = Y, DE ∩ d = Z;4) SX ∩ BB' = N;5) QZ ∩ EE' = T;6) NY ∩ AA' = P;7) SNPTQ — искомое сечение.



Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1.Перечислите виды призмы.

2. Дайте определение оси семметрии.

Тема 4.3. Тела и поверхности вращения.

Основные понятия и термины по теме: *Цилиндр, конус, усеченный конус., боковая поверхность, образующая, развертка, осевые сечения, сечения параллельные основанию, шар, сфера, касательная плоскость к сфере.*

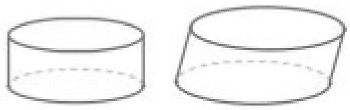
План изучения темы:

1. Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию.

Шар и сфера, их сечения. Касательная плоскость к сфере.

Краткое изложение теоретических вопросов:

1. **Цилиндром** называется тело, которое состоит из двух кругов, совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.



Круги, указанные в определении, называются основаниями цилиндра. Основания цилиндра равны и лежат в параллельных плоскостях.

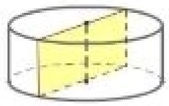
Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, называются образующими цилиндра. У цилиндра образующие параллельны и равны.

Цилиндр называется прямым, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

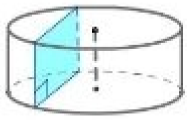
Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований.

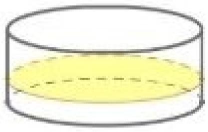
Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется осевым сечением.



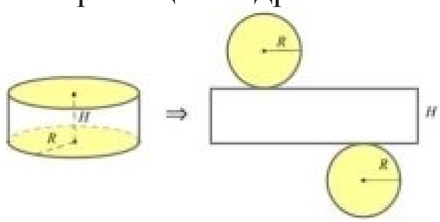
Сечение цилиндра плоскостью, паралелльной оси цилиндра, — прямоугольник.



Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, — круг.



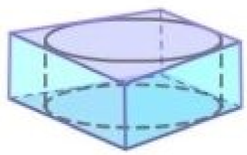
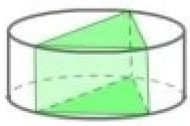
Развертка цилиндра



Вписанные и описанные призмы

Призма называется описанной около цилиндра, если ее основания — равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра. Плоскости ее граней касаются боковой поверхности цилиндра.

Призмой, вписанной в цилиндр, называется призма, основания которой — равные многоугольники, вписанные в основание цилиндра. Ее боковые ребра являются образующими цилиндра.

2. Шар и сфера, их сечения, касательная плоскость к сфере..

Шар - это тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся от данной точки на одинаковом расстоянии. Центром шара данная точка, радиусом шара называется данное расстояние. **Сферой** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на определенном расстоянии от данной точки. Диаметром шара есть отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр шара. Концы любого диаметра пули называется диаметрально противоположными точками шара. Любой сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга является основой перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость. Любая плоскость, проходящая через центр шара, является ее плоскостью симметрии. Плоскость, проходящая через центр шара, называется диаметральной плоскости. Центр шара является его центром симметрии. Плоскость, происходит через некоторую точку сферы и перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку, имеет с шаром только одну общую точку - точку касания. Прямая, лежащая в касательной плоскости к шару и проходит через точку касания, является касательной к шару в этой точке. Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы с плоскостью, перпендикулярно к касательной плоскости. Если радиус сферы перпендикулярно плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере. Линия пересечения двух сфер есть круг. Многогранник называется вписанным в шар, если все его вершины лежат на поверхности шара. Многогранник называется описанным вокруг шара, если все его грани касаются поверхности шара. Центр шара, описанной вокруг правильной пирамиды, лежит на ее оси.

Плоскость и сфера (шар) радиуса R имеют общие точки, если выполняется неравенство $d \leq R$ (d - расстояние от центра сферы (шара) до плоскости).

ОПРЕДЕЛЕНИЯ:

Касательной плоскостью к сфере называется плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Касательной плоскостью к шару называется касательная плоскость к сфере, которая является границей этого шара.

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Дайте определение геометрическим фигурам «цилиндр», «сфера», «шар».

Тема 4.4. Измерения в геометрии.

Основные понятия и термины по теме: *Объемы тел, площади поверхностей тел.*

План изучения темы:

1. Объем и его измерение. Интегральная формула объема.
2. Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Краткое изложение теоретических вопросов:

Понятие объема в пространстве вводится аналогично понятию площади для фигур на плоскости.

Определение: Тело называется простым, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

В частности, любой выпуклый многогранник является простым телом.

Определение: Объемом тела называется положительная величина, характеризующая часть пространства, занимаемую телом, и обладающая следующими свойствами:

равные тела имеют равные объемы; при параллельном переносе тела его объем не изменяется;

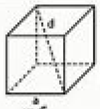
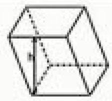
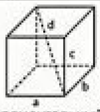
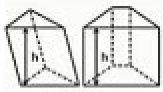
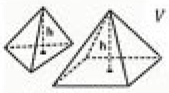
если тело разбить на части, являющиеся простыми телами, то объем тела равен объему его частей;

за единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины;

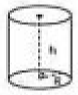
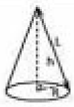
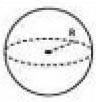
Определение: Тела с равными объемами называются равновеликими. Из свойства 2 следует, что если тело с объемом V1 содержится внутри тела с объемом V2, то V1 < V2.

2.

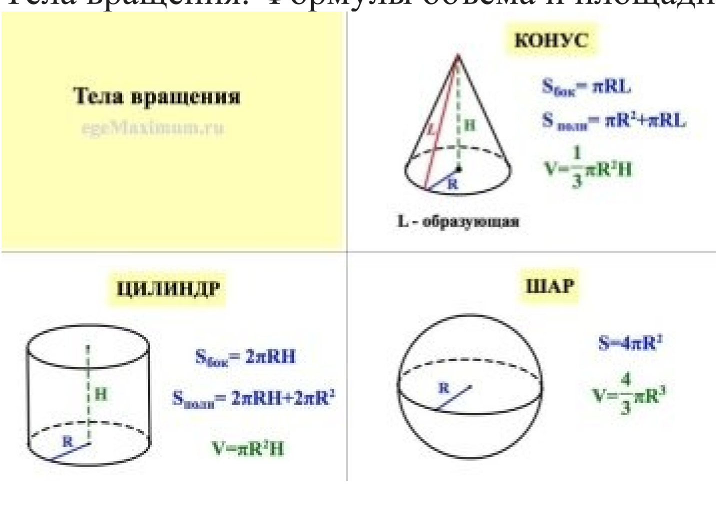
МНОГОГРАННИКИ

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 куб; $V = a^3$, a – ребро куба	$S = 6a^2$; $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 параллелепипед; $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$; $S_{осн}$ – площадь основания; h – высота
 прямоугольный параллелепипед; $V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2ab + 2ac + 2bc$; $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 призма; $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$; $S_{осн}$ – площадь основания; h – высота
 пирамида; $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 цилиндр; $V = \pi R^2 h$, R – радиус основания, h – высота	$S = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi R^2 + 2\pi R h$
 конус; $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi R L$; L – образующая; $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 шар; $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

Тела вращения. Формулы объема и площади поверхности



В частности,

Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Назовите формулы для нахождения объема и площади поверхности тел вращения

Тема 4.5. Координаты и векторы.

Основные понятия и термины по теме: *коллинеарные векторы, компланарные векторы.*

План изучения темы:

1. Формула расстояния между двумя точками. Уравнения сферы, плоскости и прямой.
2. Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Угол между двумя векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.

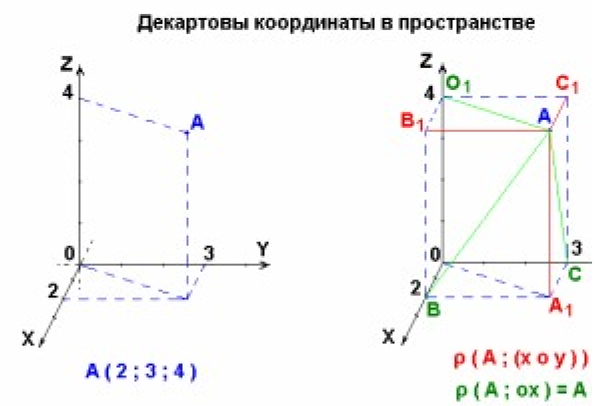
Краткое изложение теоретических вопросов:

Декартовы координаты вектора в пространстве

Прямые x, y, z называются координатными осями (или осями координат), точка их пересечения O – началом координат, а плоскости xOy, xOz и yOz – координатными плоскостями. Точка O разбивает каждую координатную ось на две полупрямые, которые называются положительной и отрицательной полуосями.

Координатой точки A по оси x будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OAx: положительное, если точка A лежит на положительной полуоси x, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси.

Аналогично можно определить координаты y и z точки A. Координаты точки A записываются в скобках рядом с названием этой точки: A (x; y; z).



Единичным вектором или ортом называется вектор, длина которого равна единице и который направлен вдоль какой-либо координатной оси.

Единичный вектор, направленный вдоль оси x, обозначается $\vec{i}$.

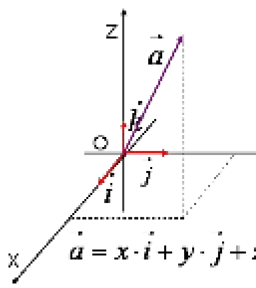
Единичный вектор, направленный вдоль оси y, обозначается $\vec{j}$.

Единичный вектор, направленный вдоль оси z, обозначается $\vec{k}$.

Вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называются координатными векторами.

Любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам: $\vec{a}=x.\vec{i}+y.\vec{j}+z.k$.

Коэффициенты разложения определяются единственным образом и называются координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат.



Координаты вектора: $\vec{a}(x_a;y_a;z_a) \Leftrightarrow \vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$

Длина вектора: $|\vec{a}|=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}$

Умножение вектора на число: $\lambda\vec{a}=(\lambda x_a;\lambda y_a;\lambda z_a)$

Угол между векторами: $\vec{a}$(xa;ya;za)·$\vec{b}$(xb;yb;zb)⇒cosγ=xa.xb+ya.yb+za.zb√x2a+ya2+za2.√x2b+yb2+zb2

Перпендикулярность векторов: $\vec{a}$(xa;ya;za)·$\vec{b}$(xb;yb;zb)⇒$\vec{a}.\vec{b}$=0⇔ xa.xb+ya.yb+za.zb=0

Коллинеарность векторов: $\vec{a}$(xa;ya;za)·$\vec{b}$(xb;yb;zb)⇒xbxa=ybya=zbza если координаты векторов не равны нулю

Определение.

Расстояние между двумя точками — это длина отрезка, что соединяет эти точки.

Формулы вычисления расстояния между двумя точками:

Формула вычисления расстояния между двумя точками A(xa, ya, za) и B(xb, yb, zb) в пространстве:

AB = √(xb - xa)2 + (yb - ya)2 + (zb - za)2

Уравнение сферы

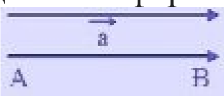
Найдем уравнение сферы радиуса R с центром в точке O1(x0;y0;z0). Согласно определению сферы расстояние любой ее точки M(x; y; z) от центра O1(x0;y0;z0) равно радиусу R, т. е. O1M= R. Но $O_1M = |\overline{O_1M}|$, где $\overline{O_1M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

или

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.}$$

Это и есть искомое уравнение сферы. Ему удовлетворяют координаты любой ее точки и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на данной сфере



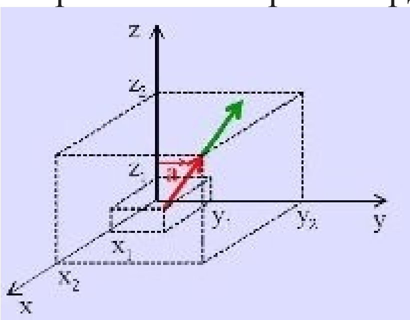
Вектором называется величина, характеризующаяся численным значением и направлением.

Векторы изображаются в виде направленных отрезков.

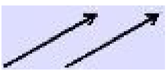
Координаты вектора - разность координат конца и начала вектора.

Координаты вектора не изменяются при параллельном переносе.

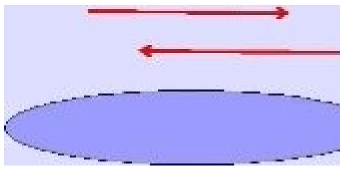
У равных векторов координаты равны.



Коллинеарные векторы - векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. 

сонаправленные  противоположно направленные  равные  противоположные

Компланарные векторы - векторы, параллельные одной и той же плоскости

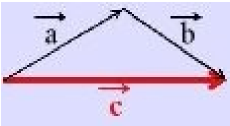


Сложение векторов

a + b = b + a

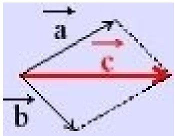
(a + b) + c = a + (b + c)

Правило треугольника



a +
b =
c

Правило параллелограмма

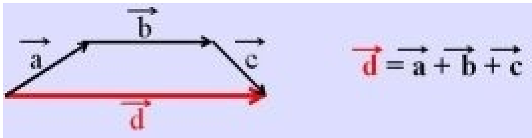


a +
b =
c

Сложение нескольких векторов

Сумма нескольких векторов находится аналогично сумме двух векторов с помощью правила многоугольника.

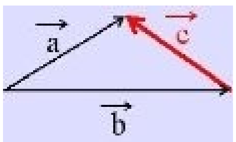
Сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.



Вычитание векторов

a - b = a + (-b)

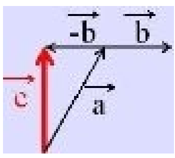
1 способ



b + c = a

c = a - b

2 способ



c = a + (-b)

Умножение вектора на число

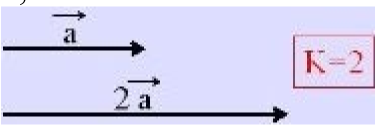
(kl)a = k(la)

k(a + b) = ka + kb

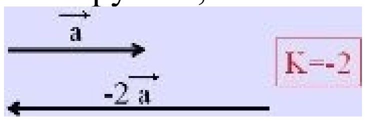
(k+l)a = ka + la

Произведение вектора a на число k - это коллинеарный ему вектор ka,

сонаправленный с вектором a, если k > 0

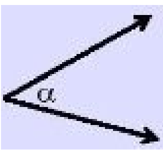


направленный противоположно вектору a, если k < 0

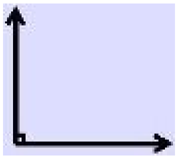


Скалярное умножение векторов

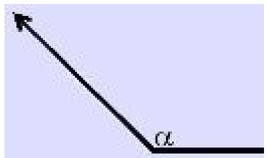
ab = |a|*|b|cos



0<90



=90



90<180

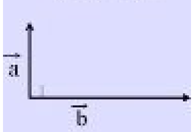
Модуль скалярного умножения векторов равен произведению их модулей: |a * b| = |a| * |b|

Косинус угла между векторами находится из соотношения

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot|\vec{b}|}$$

Скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$



Вопросы и задания для самоконтроля по теме:

1. Назовите уравнение сферы.

2. Перечислите способы сложения векторов.